



**Universidade de Aveiro** Departamento de Engenharia Civil  
2011

**Carla Maria Vieira  
Lopes**

**Modelação numérica do comportamento  
assimétrico do betão**





**Universidade  
de Aveiro  
2011**

Departamento de Engenharia Civil

**Carla Maria Vieira  
Lopes**

**Modelação numérica do comportamento  
assimétrico do betão**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil, realizada sob a orientação científica do Prof. Doutor Rui Pedro Ramos Cardoso, Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro e do Prof. Doutor Humberto Salazar Amorim Varum, Professor Associado do Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Aveiro.



Dedico este trabalho à minha família e aos meus amigos.



**Presidente**

**Prof.<sup>a</sup> Doutora Margarida João Fernandes de Pinho Lopes**

Professora Auxiliar do Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Aveiro

**Arguente**

**Prof. Doutor Jorge Tiago Queirós da Silva Pinto**

Professor Auxiliar do Departamento de Engenharias da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

**Vogal Orientador**

**Prof. Doutor Rui Pedro Ramos Cardoso**

Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro

**Vogal Co-  
Orientador**

**Prof. Doutor Humberto Salazar Amorim Varum**

Professor Associado do Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Aveiro





**Agradecimentos**

Os meus agradecimentos vão para o Professor Rui Pedro Ramos Cardoso e para o Professor Humberto Salazar Amorim Varum por todo o apoio, dedicação, disponibilidade, incentivo e orientação.



**Palavras-chave** Tração/compressão e comportamento assimétrico, betão, modelação numérica, critério de cedência, elementos finitos.

**Resumo** Este trabalho descreve um modelo de simulação do comportamento do betão, por analogia a testes tecnológicos com o magnésio, uma vez que são materiais com comportamento mecânico semelhante. O critério de cedência de Cazacu tem sido muito utilizado na modelação numérica de estruturas com ligas de Magnésio, apresentando, do mesmo modo, um comportamento assimétrico para estados de tração e de compressão. Deste modo, pretende-se implementar o critério de cedência de Cazacu em programa de elementos finitos (através de “user subroutines”) e avaliar a capacidade do critério em reproduzir o comportamento de estruturas em betão. A validação numérica do critério será primeiro verificada pela comparação entre os resultados experimentais provenientes de ensaios de tração e compressão do betão e a simulação numérica de elementos estruturais isolados e estruturas mais complexas de betão.



**Keywords**

Tensile/ Compression and asymmetric behaviour, concrete, numerical modelling, yield criterion, finite elements.

**Abstract**

This work describes a model for the simulation of the concrete behaviour using the analogy equivalent studies performed with magnesium, given that both materials exhibit a similar mechanical behaviour.

For the purpose, the Cazacu yield criterion was used in the numerical modelling of structures in magnesium alloys, also presenting a non-symmetric constitutive behaviour in tensile or compression testing. This way, the objective is to implement a Cazacu yield criterion in a Finite element program, as a “user defined” subroutine and investigate the capacity of the so designed criterion in reproducing the behaviour at the structures.

The numerical validation of this criterion needs a first comparison with experimental data from standard tensile or compression testing and the numerical simulation of single structural elements from more complex concrete structures.

## Índice

<b>1 – INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1 – Objectivos.....	1
1.2 – O material betão .....	2
1.3 – O material magnésio.....	6
1.4 – Estrutura da tese.....	8
<b>2 – CRITÉRIOS DE CEDÊNCIA .....</b>	<b>9</b>
2.1 – Critério de cedência de von Mises.....	10
2.2 – Critério de cedência de Tresca .....	14
2.3 – Critério de cedência de Mohr-Coulomb .....	20
2.4 – Critério de cedência de Drucker-Prager.....	25
2.5 – Critério de cedência de Cazacu para materiais HCP (Hexagonal Closed-Pack) .....	27
<b>3– SOLICITAÇÃO BIAXIAL DO BETÃO.....</b>	<b>35</b>
<b>4 – CARACTERIZAÇÃO DOS PARÂMETROS MATERIAIS PARA O MODELO NUMÉRICO DO CRITÉRIO DE CEDÊNCIA DE CAZACU .....</b>	<b>37</b>
<b>5 – MODELOS E RESULTADOS NUMÉRICOS.....</b>	<b>40</b>
5.1 – Método dos Elementos Finitos.....	40
5.2 – Validação numérica do modelo implementado .....	42
5.2.1 – Flexão de uma viga em três pontos.....	43
5.2.2 – Ligação viga-pilar .....	45
5.2.3 – Viga-parede .....	49
<b>6 – CONCLUSÃO .....</b>	<b>52</b>
<b>7 – PERSPECTIVA DE FUTUROS TRABALHOS .....</b>	<b>52</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>54</b>
<b>ANEXO - SUBROTINA EM FORTRAN .....</b>	<b>56</b>

## Lista de Figuras

Figura 1 – Representação dos critérios de plasticidade de von Mises e de Tresca para um estado biaxial de tensão (tensão plana) e no plano das tensões principais. [11] .....	17
Figura 2 – Representação gráfica da superfície limite de elasticidade de Tresca e de von Mises no espaço tridimensional das tensões principais [11]. .....	18
Figura 3 – Critério de plasticidade de Mohr no plano de tensões [11].....	22
Figura 4 – Representação geométrica da superfície limite de elasticidade de Mohr-Coulomb e de Drucker-Prager no espaço das tensões principais [11]. .....	26
Figura 5 – Superfície de plasticidade isotrópica.....	30
Figura 6 – Superfície de cedência de Cazacu para um material com assimetria de tensões.....	31
Figura 7 – Diferentes relações entre tensão de tração e de compressão para o critério de Cazacu.....	31
Figura 8 – Comparação entre diferentes valores de k. ....	32
Figura 9 – Valor de k positivo e negativo. ....	33
Figura 10 – Resistência a estados de tensão biaxiais do betão [12].....	36
Figura 11 – Pontos que representam estados de tensão biaxiais do betão. ....	38
Figura 12 – Representação do critério de Cazacu aplicado ao betão. ....	40
Figura 13 – Representação do ensaio de flexão.....	43
Figura 14 – Representação de condições de fronteira, carregamentos e número de elementos.....	44
Figura 15 – Distribuição da tensão equivalente de von Mises. ....	44
Figura 16 – Distribuição de tensões aplicando o critério de Cazacu. ....	45
Figura 17 – Condições de fronteira e carregamentos da ligação viga-pilar.....	46
Figura 18 – Representação de condições de fronteira, carregamentos e número de elementos.....	47
Figura 19 – Distribuição da tensão equivalente de von Mises. ....	47
Figura 20 – Distribuição de tensões aplicando o critério de Cazacu .....	48
Figura 21 – Distribuição dos carregamentos e condições de fronteira da viga-parede.....	49
Figura 22 – Representação de condições de fronteira, carregamentos e número de elementos.....	50
Figura 23 – Distribuição da tensão equivalente de von Mises .....	50
Figura 24 – Distribuição de tensões aplicando o critério de Cazacu. ....	51





## **1 – Introdução**

### **1.1 – Objectivos**

O tema deste trabalho é de elevado interesse para o projeto na construção civil na medida em que, nesta indústria, o betão considera-se o material mais importante e como tal, tem uma vasta utilização, nomeadamente em paredes, pavimentos, pórticos, fundações, barragens, reservatórios e outros mais. Torna-se assim necessário efetuar um estudo aprofundado do seu comportamento mecânico para que se perceba e preveja com rigor os seus mecanismos de deformação e capacidade de resistência. Ao aprofundar-se o estudo do comportamento do betão, é mais fácil projetar um futuro com mais segurança e aumentar também a sustentabilidade e fiabilidade estrutural na construção civil.

Com este trabalho, pretende-se aplicar um novo critério de cedência para o estudo da resistência mecânica do betão. O critério que se pretende propor o de Cazacu et al. [1], que tem vindo a ser utilizado extensivamente na caracterização da resistência mecânica de ligas metálicas de Magnésio. Estas ligas metálicas apresentam um comportamento mecânico muito semelhante ao do betão no que diz respeito à assimetria ou diferencial de comportamento mecânico a solicitações de tração e de compressão. As grandes vantagens da utilização do critério de cedência de Cazacu et al. [1] ao betão reside no seguinte: 1) através de um ajuste dos parâmetros materiais do critério se conseguir descrever o comportamento mecânico de vários tipos de betão; 2) pelo facto deste critério ter sido desenvolvido inicialmente para o estudo do comportamento mecânico de materiais metálicos, implica que o mesmo possa ser facilmente estendido e aplicado no estudo do comportamento mecânico do betão armado, pois pode prever a cedência, quer do betão quer do aço presente na armação.

Neste sentido, este trabalho tem como principal objetivo a implementação numérica do critério de cedência de Cazacu et al. [1], orientando-o para a modelação numérica e cálculo estrutural do betão. Este modelo numérico será implementado numa rotina em fortran, por forma a ser compilada e integrada no programa comercial de modelação numérica por elementos finitos MSC.Marc [2]. A partir deste procedimento, torna-se possível efetuar a modelação por elementos

finitos do comportamento mecânico do betão e prever com exatidão a assimetria do seu comportamento à tração e à compressão.

## **1.2 – O material betão**

A Idade Moderna na sua componente industrial (compreendida entre os séculos XIX-XX) foi marcada pela Revolução Industrial, na qual se verificou, como resultado de aumento populacional, o desenvolvimento das cidades a todos os níveis, com reflexos importantes na Ecologia, ou seja, o surgimento das preocupações ambientais. Isto levou à evolução na conceção estrutural e tecnologia aplicada, decorrentes essencialmente dos progressos técnicos sobre os materiais de construção, sobretudo a partir do desenvolvimento e aperfeiçoamento das técnicas utilizadas [3].

O processo de industrialização que se aplicou em alguns materiais, tais como a alvenaria de pedra, a madeira ou o vidro, não alterou grandemente a sua natureza, potenciando o acesso destes materiais ao mercado por uma elevada eficácia de utilização. A crescente evolução na utilização do tijolo e depois do cimento, usado sob a forma de betão, conduziu a que rapidamente fossem substituídos os materiais tradicionais [3].

Atualmente, materiais estruturais como o ferro, aço, betão, betão armado e betão pré-esforçado permitem o desenvolvimento de novas formas de edificação, que, por sua vez, respondem às necessidades de um mundo em crescente evolução/modernização. Estes novos materiais permitiram o desenvolvimento de maquinaria e de novos meios auxiliares à construção que revolucionaram os métodos construtivos e encurtaram os seus prazos de execução. Dá-se assim o aparecimento de estruturas do tipo, pórticos isostáticos e hiperestáticos como por exemplo, pontes e estruturas com grandes vãos vencidos com lajes planas em betão [3].

Antigamente, o betão era considerado um material que existia com pressupostos muito arcaicos, utilizado por Assírios, Caldeus, Fenícios, Egípcios, Etruscos e Gregos. Nessa altura, este material existia sob a forma de aglomerados aéreos [4].

Louis Vicat, em 1812, iniciou os estudos sobre a cozedura conjunta de calcário e argila que levaram à criação de um ligante artificial cujo fabrico viria a ser patenteado por Joseph Aspdin em 1824, a que se deu o nome de cimento Portland, e a partir daqui criou-se um novo material de construção, composto por uma mistura de pedras (inertes grossos e finos), areias, cimento Portland e água, a que se deu o nome de betão [5]. Se a máxima granulometria do inerte for menor ou igual a 4mm, o material denomina-se de argamassa [6]. A partir de 1845 o cimento Portland começou a ser produzido a uma escala industrial [4].

O betão evoluiu muito nos últimos anos, e a indústria cimenteira em Portugal apresentou novos cimentos, bem como aditivos e adjuvantes que ajudam na formação do material que contribuíram para uma redução significativa de água de amassadura, sem com isso colocar em causa as propriedades mecânicas [3].

O aumento da resistência mecânica do betão contribuiu para que os elementos estruturais reduzissem drasticamente os seus vãos, aumentando assim os níveis de carregamento que conseguem suportar [3]. A diminuição destas dimensões reflete-se diretamente na redução do volume do betão necessário e, consequentemente, na redução dos custos e cargas associadas ao peso próprio das estruturas. Deste modo, a melhoria das propriedades mecânicas e reológicas dos betões reflete-se num conjunto de vantagens técnico-económicas consideráveis, aumentando assim a competitividade como elemento estrutural na construção civil.

O betão em estado fresco comporta-se como um material plástico. A sua colocação em obra é extremamente fácil, feita por intermédio de cofragens e é extremamente fácil, adaptando-se facilmente à realização de estruturas de diferentes formas, onde a sua presa pode ser realizada ao ar livre ou submerso. Após endurecimento, comporta-se como um material estável e duradouro e com a particularidade adicional das suas propriedades mecânicas melhorarem ao longo do tempo.

A composição do betão, no que respeita às dosagens dos seus componentes, deve ser selecionada de modo a satisfazer os seus critérios de comportamento, tais como a consistência, densidade, resistência mecânica e durabilidade. A durabilidade não é uma propriedade intrínseca dos materiais, mas sim uma função

relacionada com o desempenho do material durante o tempo de vida e sob determinadas condições ambientais [3].

As principais propriedades mecânicas que caracterizam o betão são a resistência à compressão, resistência à tração e módulo de elasticidade. Estas propriedades são usualmente determinadas a partir de ensaios mecânicos executados em condições específicas. Geralmente, os ensaios são realizados para controle da qualidade e para verificar se o material está de acordo com as especificações em vigor.

Segundo o Eurocódigo 2, o betão é caracterizado por ter uma elevada resistência a esforços de compressão, com valores compreendidos de 12 a 90 MPa, contudo com baixa resistência a esforços de tração, com valores que vão de 1,1 a 3,5 MPa. Por sua vez, o módulo de elasticidade tem valores tipicamente compreendidos entre 27 e 44 GPa [6].

No entanto, elementos estruturais como lajes, vigas, pilares, solicitados por outros esforços, como tração, flexão, compressão e punçãoamento, podem ter ultrapassada a resistência mecânica do betão [6]. Por isso, torna-se necessário a adição de um material que resista bem a estes esforços, nomeadamente o aço. A combinação dos dois materiais, aço e betão, é possível realizar-se com sucesso devido a uma série de características que ambos possuem, das quais se destaca a boa aderência e a dilatação térmica. Este material, que resulta da combinação do betão e do aço denomina-se por betão armado [6].

O betão armado apresenta muitas vantagens na sua utilização, como a elevada resistência mecânica, absorção de vibrações e resistência ao fogo, permitindo adaptar-se a qualquer forma geométrica, e aumentando a sua resistência a esforços aplicados ao longo do tempo. No entanto, também apresenta algumas desvantagens, tais como a dificuldade na moldagem de peças com secções reduzidas e o aumento de mão de obra devido a uma maior necessidade de se utilizar a armadura de aço, o que contribui para o aumento do custo da edificação [3]. A utilização conjunta do aço e do betão em projeto estrutural tem muito sucesso quando se dispõe convenientemente das armaduras na secção considerada, proporcionando o aumento da resistência mecânica à tração e, a capacidade de carga da estrutura.

A resistência à compressão depende quase exclusivamente da capacidade resistente do betão, enquanto que a resistência à tração depende essencialmente das armaduras em aço [3]. O betão armado deve apresentar duas características fundamentais: i) a resistência à ação dos esforços; ii) a durabilidade. Na execução de estruturas de betão armado, a qualidade do produto final depende de inúmeros fatores. No entanto, é extremamente susceptível à falha humana. Através do controlo de qualidade, os responsáveis pelo processo construtivo verificam o cumprimento dos requisitos previamente especificados para uma determinada estrutura. Tal controlo é levado a cabo através de inspeções e ensaios, utilizando, de preferência, métodos não destrutivos ou minimamente intrusivos. Existe outro tipo de betão, o pré-esforçado, cujo processo de pré-esforço consiste na aplicação de forças prévias à estrutura de modo a tracionar as armaduras [6]. O termo utilizado (pré-esforço) é utilizado para designar o conjunto dos efeitos permanentes do processo de pré-esforço que incluem esforços nas secções e deformações na estrutura em questão [6].

Até há poucos anos, em Portugal, as normas e regulamentos para o dimensionamento de estruturas correntes e para a caracterização e controle dos materiais de construção, nomeadamente o betão, eram as seguintes; o Regulamento de Betões e Ligantes Hidráulicos (RBLH), o Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-esforçado (REBAP) e o Regulamento de Estruturas de Aço para Edifícios (REAE). Para a quantificação e combinação de ações usava-se o Regulamento de Segurança e Ações para Estruturas de Edifícios e Pontes (RSA).

Com o objetivo de unificar todos os procedimentos de análise e dimensionamento de estruturas nos diversos países da Europa, foram criados os Eurocódigos, que vêm substituir os códigos nacionais. Para as estruturas de betão, o REBAP é substituído pelo Eurocódigo 2 (EC2), *Dimensionamento de Estruturas de Betão*, ou (norma EN 1992).

A Pré-Norma Europeia ENV 206 foi revista como norma de produto, dando origem à Norma Europeia EN 206-1, que relaciona a colocação e cura do betão nas estruturas. A atual Pré-Norma Europeia ENV 13670-1 contempla, entre outros aspetos, os procedimentos sobre a colocação das armaduras, de aço corrente ou de pré-esforço, e dos elementos pré-fabricados em betão.

O Regulamento de Estruturas de Aço para Edifícios foi substituído pelo Eurocódigo 3 (EC3).

### 1.3 – O material magnésio

O magnésio foi descoberto em 1755 pelo Escocês Joseph Black, e apesar da grande variedade de metais existente, a maioria não é empregue ou aplicado em estado puro, mas sim como liga, com propriedades alteradas em relação ao material inicial ou associados a outros materiais/metals, tendo como objetivo principal reduzir os custos de produção [7].

O uso do magnésio centra-se especialmente em três propriedades fundamentais que o caracterizam, que é a tendência à formação de compostos intermetálicos com outros metais, a sua elevada reatividade e, principalmente, a elevada relação rigidez/massa que o torna um metal excecional para aplicações estruturais onde se pretende elevada resistência mecânica associada ao baixo peso do material [7].

O magnésio tem uma excelente uma excelente relação peso/resistência mecânica e elevada capacidade de amortecimento ao impacto. Para além destes atributos, o seu baixo ponto de fusão contribui para o baixo custo e facilidade no processo de reciclagem de materiais [7].

O magnésio é empregue em grande escala, como elemento de liga com o material alumínio, especialmente na construção de veículos automóveis, na indústria aeronáutica, na manipulação industrial com robots, na automatização e nas tecnologias de comunicação. Na indústria automóvel, as ligas de magnésio tem tido um elevado crescimento de utilização na produção de peças que vão desde as caixas de velocidade até às jantes das rodas. Por outro lado, na indústria aeronáutica, as ligas de magnésio são largamente utilizadas por exemplo em componentes de motores, e na fuselagem e em trens de aterragem. Na indústria bélica tem-se vindo a utilizar-se também com bastante frequência as ligas de magnésio especialmente no fabrico de mísseis, exatamente por o magnésio ser um material leve e com bastante rigidez mecânica [8].

Outro aspecto que abona a favor da utilização de ligas de magnésio tem a ver com as mudanças na legislação ambiental, pois esta mudança veio revolucionar o tipo de materiais utilizados para construção dos veículos, exigindo para tal que estes se tornassem mais leves, diminuindo assim o consumo de combustível e as emissões de gases com efeito estufa [7].

Contudo, as ligas de magnésio têm alguns inconvenientes, tais como o facto de serem ligas que têm forte reactividade com a água do mar, evitando assim a sua utilização por exemplo na construção de porta-aviões [7].

Outra importante característica importante do magnésio, e que é a principal razão de estar a ser considerada neste trabalho, é a assimetria de comportamento para solicitações de tração e de compressão. O magnésio apresenta uma estrutura cristalográfica do tipo HCP (Hexagonal Closed-Pack), que é uma estrutura onde existe muito pouca simetria cristalográfica, o que implica que um dos seus principais mecanismos de deformação seja por “twinning”, ou por distorção cristalográfica. Este mecanismo de twinning é direcional, o que explica a assimetria do comportamento à tração e à compressão. Cazacu et al. [1] desenvolveram um critério macroscópico de cedência para materiais com estrutura cristalográfica HCP. Este critério permite diferenciar o comportamento à tração e à compressão e assim modelar macroscopicamente o comportamento mecânico do magnésio. É com base neste trabalho de Cazacu que se vai adaptar o critério de cedência para materiais com estrutura cristalográfica HCP ao estudo do betão.

O estudo de ligas de magnésio tem também um interesse orientado para outro tipo de aplicações, como o exemplo, o das indústrias que apostam na versatilidade do magnésio tendo em conta a sua baixa densidade, utilizando-o sobretudo no mercado automóvel e aeroespacial [7]. Estas indústrias em particular são responsáveis por consumir mais de metade do magnésio que é produzido mundialmente [7]. Atualmente, no mercado automóvel, existe uma preocupação em se produzir veículos mais económicos, mais leves e menos poluidores [7]. Existe também a estratégia de se usar intensivamente materiais com elevada relação rigidez/peso, sem com isso sacrificar os requisitos de conforto e segurança que é fundamental para os veículos automóveis. Da mesma forma, a utilização de magnésio em aeronaves permite reduzir o seu peso, economizar em termos de consumos e diminuir os níveis de poluição atmosférica [7].

Como principais ligas de magnésio podemos destacar a liga de Magnésio-Alumínio, tendo na sua constituição 85% de Mg e até 10% de alumínio, cerca de 3% de zinco e menos do que 0,6% de manganês. O alumínio permite melhorar a colabilidade, o zinco a ductilidade e o manganês a resistência à corrosão [8]. Um tipo de liga que também é muito utilizada é a liga Magnésio-Zircónio por causa da

sua elevada resistência mecânica. Esta liga é normalmente usada em peças forjadas, estampadas ou perfiladas [8].

Outro exemplo de material que utiliza uma estrutura cristalográfica do tipo HCP são as ligas de titânio. Estas ligas têm uma elevada resistência à corrosão, sendo esta superior à dos aços inoxidáveis, e é detentora de uma excelente resistência à fadiga, boa resiliência, baixa densidade (quando comparada com o alumínio e o aço), uma elevada resistência mecânica à temperatura ambiente e a altas temperaturas (superiores a 600°C). As ligas de titânio são sobretudo utilizadas em aeronaves, mísseis, partes dos navios expostas à água salgada, implantes em corpo humano, componentes de tintas com (TiO<sub>2</sub>) e em bicicletas de competição. O critério de Cazacu et al. [1] também é muito utilizado na modelação numérica das ligas de titânio [1].

A maior parte dos materiais, especialmente os metálicos, têm inicialmente um comportamento linear elástico, onde as deformações aplicadas são lineares e reversíveis, seguido de um comportamento não linear do material (que nos metais é designado por comportamento plástico) onde as deformações são não lineares e irreversíveis. A fronteira entre o estado de tensão uniaxial linear elástico e o estado de tensão uniaxial em regime plástico designa-se por tensão de cedência ou tensão limite de elasticidade. No caso de um estado geral de tensão multi-axial, é necessária a utilização de um critério de cedência que permite transformar o estado de tensão multi-axial num estado de tensão uniaxial equivalente. É com base neste estado de tensão equivalente que se pode concluir se o ponto do corpo material se encontra em regime elástico ou plástico. O critério de cedência define na fronteira uma superfície de cedência que limita o regime elástico no espaço das tensões [9].

#### **1.4 – Estrutura da tese**

A estrutura da tese foi organizada por capítulos e subcapítulos de modo a facilitar a compreensão de todos os passos envolvidos durante o trabalho.

O capítulo 1 descreve resumidamente os objetivos do trabalho, bem como os materiais betão e magnésio.

Os vários critérios de cedência, nomeadamente o de von Mises, Tresca, Mohr-Coulomb, Drucker-Prager e Cazacu, apresentam-se no capítulo 2.



De seguida, o capítulo 3 descreve a solicitação biaxial do betão.

O capítulo 4 é constituído pela caracterização dos parâmetros materiais para o modelo numérico do critério de cedência de Cazacu.

Apresenta-se no capítulo 5 os modelos numéricos que se pretende estudar, e este subdivide-se em subcapítulos onde se descreve resumidamente o método de elementos finitos e se apresenta a validação numérica dos modelos do betão que se pretende implementar.

Por último, no capítulo 6, apresenta-se as principais conclusões e no capítulo 7 faz-se sugestões para trabalhos futuros no âmbito do tema desenvolvido.

## **2 – Critérios de cedência**

Estudar ao pormenor o comportamento de materiais como o betão tem um elevado interesse industrial, visto ser um material muito utilizado em construção civil, e com esse estudo tem-se o intuito de se perceber, controlar, prever e minimizar possíveis problemas associados ao seu comportamento e à sua aplicação estrutural.

Para o betão vai assumir-se que o seu comportamento se caracteriza quase completamente em regime elástico. Assim, quando o estado de tensão atingir a superfície de cedência, significa que o betão entrou em rotura. Por outras palavras, isto significa que se vai assumir um comportamento frágil para o material.

Um aspecto importante para o desenvolvimento dos critérios de cedência que se seguem diz respeito ao seguinte: experimentalmente verifica-se que o trabalho plástico produzido por um estado de tensão hidrostático é desprezável, ou mesmo zero, pelo que normalmente não se considera este estado de tensão na caracterização dos diversos critérios de cedência que são utilizados no estudo da plasticidade. Assim, é muito comum trabalhar-se com um estado de tensão designado por tensor das tensões de desvio que é facilmente obtido retirando-se ao estado de tensão total a componente hidrostática do tensor das tensões.

Nos últimos anos, muitos têm sido os critérios de cedência propostos para tentar descrever o comportamento plástico de materiais isotrópicos e anisotrópicos [9]. O objetivo dos critérios de cedência passa por obter relações que descrevam

condições matemáticas ou físicas, para as quais se dá o início da deformação plástica quando o material está sujeito a uma ou conjunto de cargas. Dos vários critérios de cedência que foram desenvolvidos, destaca-se o de Tresca, o de von Mises, dos mais utilizados para a caracterização da cedência em materiais isotrópicos e dúcteis como o exemplo do aço, e o de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager para o estudo de materiais frágeis como o betão com diferenças no comportamento à tração e à compressão [10].

Nas secções seguintes, vai-se efetuar uma descrição destes critérios de cedência, tendo como principal objetivo demonstrar porque têm sido utilizados para o estudo do comportamento mecânico de diversos materiais e também mencionar as suas principais limitações quando aplicados ao estudo de um material com comportamento assimétrico como é o caso do betão. Os critérios de cedência apresentados têm como base o livro de Tecnologia Mecânica de Jorge Rodrigues e Paulo Martins [11].

## **2.1 – Critério de cedência de von Mises**

O critério de von Mises é dos critérios de cedência que mais tem sido utilizado ao longo do tempo para definir a fronteira entre o regime elástico e o regime plástico em materiais isotrópicos como, por exemplo, o aço. Este critério permite obter uma tensão equivalente uni-dimensional a partir de um estado de tensão genérico que origina a mesma energia de distorção que a do estado de tensão uni-dimensional equivalente aplicado ao material. Quando essa tensão equivalente iguala a de cedência do material então o critério de von Mises define, no espaço das tensões principais, uma superfície designada por superfície de cedência, que separa a região de estados de tensão elásticos (dentro da superfície) da região de estados de tensão irreversíveis ou plásticos (fora da superfície) [10].

Independentemente do referencial considerado para a caracterização do tensor das tensões, a cedência deverá ser indiferente a este referencial assim como o critério utilizado. Para o efeito, é normal definir-se o critério de von Mises em função dos invariantes do tensor das tensões de desvio, nomeadamente em função do segundo invariante  $J_2$  já que o primeiro  $J_1$  como está relacionado com o tensor das tensões hidrostáticas é considerado nulo.

O critério de von Mises surge em 1913 e enuncia que a deformação plástica surge quando o valor da energia elástica de distorção por unidade de volume, denominada por  $w_d^e$  atinge um valor crítico que é equivalente ao da energia elástica de distorção do estado de tensão de cedência do material. O segundo invariante do tensor das tensões de desvio é obtido a partir da seguinte equação:

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = \frac{1}{2} (\sigma'^2_x + \sigma'^2_y + \sigma'^2_z) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 \\ &= \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2] \end{aligned} \quad (1)$$

O módulo de elasticidade volumétrico,  $k$ , permite obter a variação ou dilatação volumétrica num corpo quando sujeito a um estado de tensão hidrostático e representa-se da seguinte forma:

$$k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (2)$$

Verifica-se que para materiais incompressíveis, como por exemplo o caso da borracha, o coeficiente de Poisson  $\nu$  aproxima-se de 0,5, o que implica que o módulo de elasticidade volumétrico tende para infinito, e se traduz numa dilatação volumétrica praticamente nula.

O módulo de elasticidade transversal ou também designado módulo de rigidez ao corte é obtido através da seguinte expressão:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3)$$

A partir do segundo invariante do tensor das tensões de desvio, do módulo de elasticidade volumétrica e transversal e a tensão média  $\sigma_m$ , ou tensão hidrostática, chega-se a seguinte equação que representa a energia elástica de distorção:

$$w^e = \frac{J_2}{2G} + \frac{\sigma_m^2}{2k} \quad (4)$$

A energia elástica de distorção pode ser ainda obtida a partir da tensão de corte octaédrica,  $\tau_{oct}$ , da seguinte forma:

$$w^e = \frac{3}{4G} \tau_{oct}^2 + \frac{\sigma_m^2}{2k} \quad (5)$$

Facilmente se pode concluir que:

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2} \quad (6)$$

A equação (5) é constituída por duas parcelas: i) a primeira denomina-se por energia elástica de distorção e está relacionada com o tensor das tensões de desvio, na qual mantém uma relação proporcional com o quadrado da tensão de corte octaédrica  $\tau_{oct}^2$ ; ii) a segunda parcela descreve a energia de dilatação ou contração volumétrica e é obtida a partir do tensor hidrostático de tensão, representado na equação através da tensão média  $\sigma_m$ .

Para efeitos relacionados com o estudo da cedência dos materiais considera-se normalmente que o valor da energia elástica de deformação é o caracterizado apenas pelas suas componentes de desvio, ou seja:

$$w_d^e = \frac{J_2}{2G} = \frac{3}{4G} \tau_{oct}^2 \geq w_{crítico} \quad (7)$$

A tensão de corte octaédrica é obtida através da projeção da tensão resultante em planos de corte octaédricos, ou seja, planos cuja normal está igualmente inclinada em relação às direções principais de tensão. Assim, a tensão de corte octaédrica pode ser facilmente deduzida, obtendo-se a seguinte expressão:

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \quad (8)$$

O valor crítico da energia elástica de distorção por unidade de volume determina-se considerando o início da deformação plástica para um estado de tração uniaxial, no qual obedece às seguintes condições:

$$\sigma_1 = \sigma_e \quad (9)$$

e

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad (10)$$

onde  $\sigma_e$  representa a tensão de cedência ou tensão limite de elasticidade do material.

Nestas condições, a energia de distorção elástica crítica por unidade de volume, obtida a partir da relação da tensão de corte octaédrica da equação (8), é obtida por substituição do estado de tensão do ensaio de tração uniaxial, ou seja:

$$w_{crítico} = \frac{3}{4G} \left[ \frac{1}{3} \sqrt{2\sigma_e^2} \right]^2 = \frac{1}{6G} \sigma_e^2 \quad (11)$$

A partir das expressões (1) e (7) chega-se à seguinte expressão para o critério de von Mises:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_e^2 \quad (12)$$

Repare-se a partir da expressão para o critério de von Mises que um estado de tensão tri-dimensional genérico é comparado com uma tensão uniaxial que é a

tensão de cedência do material. Esta expressão traduz bem o significado e a importância dos critérios de cedência, que se pode resumir na característica do critério conseguir aferir e comparar um estado de tensão multi-axial com um estado de tensão uniaxial que resulta de um ensaio mecânico de tração.

Caso o estado da tensão não se encontre definido no sistema de eixos principais, mas num sistema de eixos cartesianos definido por (x, y, z), então a expressão para o estado de tensão equivalente de von Mises assume um formato mais genérico:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) = 2\sigma_e^2 \quad (13)$$

## 2.2 – Critério de cedência de Tresca

O critério de cedência de Tresca desenvolvido em 1864, pressupõe que a deformação plástica se inicia quando o valor da tensão de corte máxima instalada,  $\tau_{m\acute{a}x}$ , for superior a um valor relativo à tensão de corte máxima que se obtém a partir de um ensaio de tração. Este critério considera as tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$ , em que se as tensões principais estiverem ordenadas, ou seja,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , então a tensão de corte máxima instalada é igual a metade da diferença entre a maior e a menor tensão principal.

De seguida apresenta-se a expressão do valor da tensão de corte máxima instalada,  $\tau_{m\acute{a}x}$ , que considera como limite máximo de comparação um parâmetro k que é dependente do material que se está a utilizar e que é determinado experimentalmente a partir de um ensaio mecânico de tração. Através da representação gráfica do círculo de Mohr, facilmente se conclui que a tensão de corte máxima instalada se relaciona com esse parâmetro experimental de corte da seguinte forma:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \geq k \quad (14)$$

Quando o valor da tensão de corte máxima que se aplica for inferior a um valor crítico k, a deformação induzida é puramente elástica. O valor crítico pode ser

determinado a partir de ensaios uniaxiais (tração ou compressão) ou torção. Deste modo, substituindo as expressões (9) e (10), que definem o estado de tensão num ensaio universal de tração, na equação (14), é possível obter a relação entre o valor da tensão de corte crítica  $k$  e a tensão limite de elasticidade do ensaio de tração uniaxial  $\sigma_e$ , que se representa a partir da seguinte expressão:

$$k = \frac{\sigma_e}{2} \quad (15)$$

A análise para um estado de tensão de corte puro pode também ser feita através do critério de von Mises a partir da equação (12). Neste caso, a tensão limite de elasticidade proveniente do ensaio de tração universal  $\sigma_e$  e a tensão de corte puro máxima  $k$  relacionam-se de forma igual à expressa na equação (15).

Se o ensaio experimental for de torção, o estado de tensão associado é um estado de tensão de corte puro. Para ambos os critérios, o estado de tensão no espaço das tensões principais vem representado da seguinte forma:

$$\sigma_1 = k \quad (16)$$

$$\sigma_2 = 0 \quad (17)$$

$$\sigma_3 = -k \quad (18)$$

Graficamente, o critério de cedência de Tresca no plano de Mohr, considera diferentes estados de tensão, que resultam de solicitações à tração, de compressão e tração-compressão, quer para regime elástico ou plástico.

Para o critério de von Mises, substituindo as expressões (16), (17) e (18) na equação (12) do critério de von Mises, obtém-se a seguinte relação entre a tensão equivalente de von Mises e a tensão de corte máxima:

$$k = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} \quad (19)$$

O critério de cedência de von Mises considera a influência da tensão intermédia  $\sigma_2$  no limite de elasticidade, o mesmo não se verifica com o critério de Tresca. O critério de von Mises, no plano de Mohr, tem uma representação bem mais pormenorizada do que o de Tresca.

Comparando as equações (8) e (12), respectivamente, a tensão de corte octaédrica e o critério de cedência de von Mises, pode-se verificar que a deformação plástica, ou a cedência, ocorre sempre que a tensão de corte que atua no plano octaédrico atinge um valor crítico.

A melhor maneira de se representar graficamente o critério de plasticidade de von Mises é a da utilização do plano das tensões principais, definidas por  $\sigma_i$  e  $\sigma_j$ . Assim, para um estado plano de tensões, definido por  $\sigma_k = 0$ , procede-se à substituição destas condições na expressão do critério de von Mises, equação (12), obtendo-se a seguinte expressão:

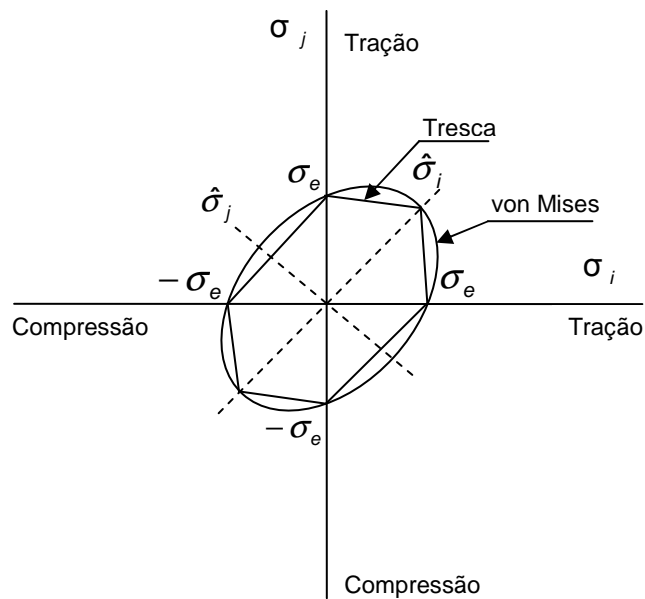
$$\sigma_i^2 + \sigma_j^2 - \sigma_i \sigma_j = \sigma_e^2 \quad (20)$$

A partir deste resultado, é possível concluir que no plano das tensões principais a curva de cedência de von Mises é uma elipse, cujo eixo maior e menor têm uma inclinação de  $45^\circ$  em relação aos eixos principais onde atuam as tensões principais  $\sigma_i$  e  $\sigma_j$ .

Se se representar graficamente o critério de Tresca a partir da equação (14), constata-se que ele define um hexágono que fica circunscrito pela elipse que define o critério de cedência de von Mises. No entanto, ambos os critérios coincidem para estados de tensão uniaxiais de tração ou compressão e para estados de tensão biaxiais simétricos, definidos por  $\sigma_i = \sigma_j$ .



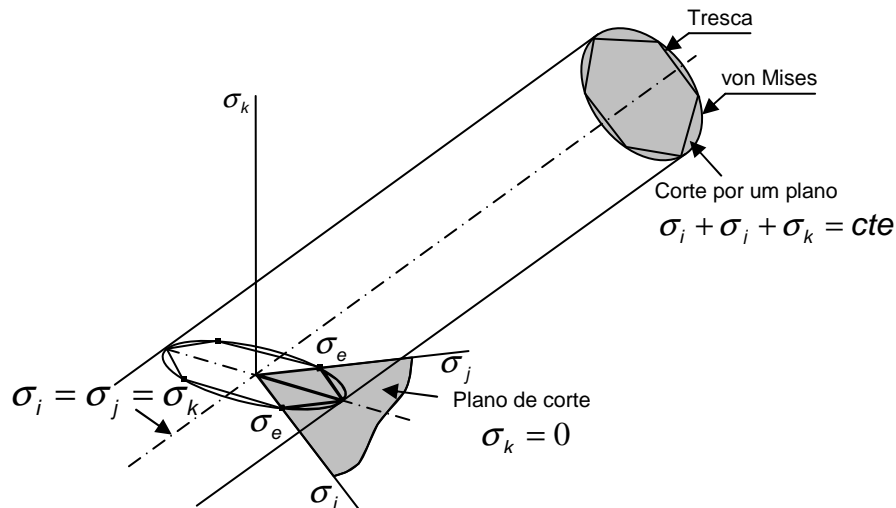
A figura que se segue compara graficamente os critérios de Tresca e de von Mises no espaço das tensões principais.



**Figura 1 – Representação dos critérios de plasticidade de von Mises e de Tresca para um estado biaxial de tensão (tensão plana) e no plano das tensões principais. [11]**

De um modo mais genérico, poder-se-á representar graficamente a superfície limite de elasticidade de Tresca e de von Mises no espaço tridimensional das tensões principais.

Na figura 2 definem-se cortes da superfície limite de elasticidade a partir de dois planos diferentes: o plano definido por  $\sigma_k = 0$  e o plano definido por  $\sigma_i + \sigma_j + \sigma_k = \text{constante}$  ou o plano das tensões de desvio.



**Figura 2 – Representação gráfica da superfície limite de elasticidade de Tresca e de von Mises no espaço tridimensional das tensões principais [11].**

A grande diferença entre os critérios de von Mises e de Tresca surge para estados de tensão em que se verifica a seguinte relação entre as tensões principais:

$$\alpha = \frac{\sigma_i}{\sigma_j} = \frac{1}{2} \quad (21)$$

e, para estados de tensão de corte puro onde:

$$\alpha = \frac{\sigma_i}{\sigma_j} = -1 \quad (22)$$

Em particular, para condições de estado de tensão de corte puro, o critério de von Mises estabelece a expressão entre a tensão equivalente de von Mises e a tensão de corte puro instalada, e é dada pela expressão (19), ou seja, diferindo estes valores cerca de 15,5 %. Poder-se-á verificar graficamente esta diferença a

partir do cálculo dos eixos maior e menor da elipse de von Mises no plano das tensões principais, podendo surgir a partir de uma transformação de coordenadas entre os eixos principais  $\sigma_i, \sigma_j$  e os eixos  $\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j$  definidos segundo a direção maior e menor da elipse. Deste modo, pode-se escrever a equação da elipse de von Mises segundo os eixos referidos, representando-a do seguinte modo:

$$\frac{\hat{\sigma}_i^2}{2} + \frac{\hat{\sigma}_j^2}{2/3} = \sigma_e^2 \quad (23)$$

Neste contexto, o semi-eixo maior é definido por:

$$\sqrt{2}\sigma_e \quad (24)$$

Por outro lado, o semi-eixo menor é obtido por:

$$\sqrt{2/3}\sigma_e \quad (25)$$

Conforme já foi referido anteriormente, o critério de plasticidade de von Mises admite que a deformação plástica tem início quando a energia elástica de distorção atinge um valor crítico, cuja interpretação física foi descrita por Hencky em 1924. Este critério foi originalmente proposto por von Mises tendo em conta o conceito de superfície limite de elasticidade e pode ser re-escrito de outra forma, em função dos invariantes do tensor das tensões:

$$f(J_2, J_3, K) = 0, \quad (26)$$

no qual se indica que a deformação plástica se inicia quando o segundo invariante do tensor desviador das tensões  $J_2$  atinge o valor crítico, ou seja:

$$J_2 - k^2 = 0 \quad (27)$$

De acordo com a análise cuidada da equação (27), é possível fazer a interpretação geométrica da superfície limite de elasticidade de von Mises de uma forma mais imediata, pois, de acordo com a equação (27), esta corresponde a um cilindro infinito com eixo na diagonal espacial do plano das tensões principais definidas por  $\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k$ , onde a curva limite de elasticidade se projeta no plano desviador, designado por plano  $\pi$ , e corresponde a uma circunferência de raio dado pela seguinte expressão:

$$\sqrt{2k} \quad (28)$$

De seguida apresenta-se outro critério de cedência que é mais adaptado ao estudo de materiais com assimetrias de comportamento à tração e à compressão como é o caso do betão. Esse critério de cedência é o de Mohr-Coulomb.

### 2.3 – Critério de cedência de Mohr-Coulomb

O critério de Mohr é especialmente interessante para materiais que apresentam resistências diferentes quando solicitados à tração e à compressão. Essencialmente por esta razão é que o critério de Mohr tem sido bastante utilizado no dimensionamento de materiais como o betão.

O critério de cedência de Mohr surge na sequência da interpretação física da lei de fratura de Coulomb em 1773 e feita por Mohr em 1882. Este critério aplica-se a materiais com comportamento mecânico do tipo frágil, ou seja, materiais em que a fratura é logo atingida após se ultrapassar o limite elástico, sendo a deformação plástica ou irreversível e que corresponde a uma parcela muito pequena no campo de deformação total. Tem-se como exemplo de materiais com esta característica, o betão, o ferro fundido, os materiais cerâmicos, o vidro, e outros que aparecem mais detalhados na referência.

O critério de Mohr é facilmente construído a partir da representação do estado de tensão no círculo ou plano de Mohr. Para o efeito, efetua-se um ensaio mecânico de um material sujeito a uma tração uniaxial e representa-se esse estado de tensão no círculo de Mohr. Da mesma forma, efetua-se outro ensaio experimental mas com o material sujeito a um estado de compressão uniaxial e

representa-se novamente o estado de tensão resultante no círculo de Mohr. O critério de cedência de Mohr representa-se no plano de Mohr por duas retas tangentes aos dois círculos representativos dos estados uniaxiais de tração e de compressão, conforme se verifica esquematicamente na figura 3. Estas curvas são conhecidas por curvas intrínsecas e definem a fronteira do domínio elástico do critério de Mohr.

Supondo um estado de tensão definido no espaço das tensões principais  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , pode-se definir ou calcular uma tensão de corte associada a esse estado de tensão que define o limite elástico do material segundo o critério de cedência de Mohr. O estado de tensão aplicado e os três círculos de Mohr correspondentes estão representados graficamente no plano de Mohr na figura 3. Para se calcular a tensão de corte equivalente,  $\tau_p$ , que define o limite elástico do material segundo o critério de Mohr, terá que ser calculada a tensão normal,  $\sigma_p$ , que lhe está associada, podendo a tensão de corte ser obtida a partir da construção gráfica da figura 3, isto é:

$$\tau_p = k_0 - \sigma_p \tan \phi \quad (29)$$

Ao substituir  $\tau_p$  e  $\sigma_p$  pelas tensões principais associadas ao estado de tensão imposto, resulta a seguinte expressão:

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \cos \phi = k_0 - \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \phi \right) \tan \phi \quad (30)$$

Que pode ser simplificada, dando assim origem à expressão que estabelece ou define o critério de cedência de Mohr:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = 2k_0 \cos \phi - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi \quad (31)$$

Para o ensaio de tração tem-se as seguintes condições ou estado de tensão:

e

Onde  $\sigma_{et}$  significa a tensão limite de elasticidade proveniente do ensaio uniaxial de tração. Pela construção gráfica do critério de cedência de Mohr da figura 3, facilmente se conclui ou se relaciona as variáveis  $k_0$  e  $\phi$  com a tensão limite de elasticidade à tração:

22

Por sua vez, para o ensaio de compressão tem-se as seguintes condições para o estado uniaxial de compressão imposto:

$$\sigma_1 = 0 \quad (35)$$

e

$$\sigma_3 = \sigma_{ec} \quad (36)$$

Obtendo-se a seguinte relação entre as variáveis  $k_0$  e  $\phi$  e a tensão limite de elasticidade à compressão:

$$k_0 = \frac{\sigma_{ec}}{2} \frac{\text{sen}\phi - 1}{\cos\phi} \quad (37)$$

Ao igualar as equações (34) e (37), é possível obter o valor de  $\phi$ :

$$\text{sen}\phi = \frac{\sigma_{et} + \sigma_{ec}}{\sigma_{ec} - \sigma_{et}} \quad (38)$$

Podendo-se obter a partir da equação (34) ou (37) o valor da tensão de corte na origem, isto é  $k_0$ :

$$k_0 = \frac{1}{\cos\phi} \frac{\sigma_{et} \sigma_{ec}}{\sigma_{ec} - \sigma_{et}} \quad (39)$$

Substituindo as variáveis,  $\text{sen}\phi$  (38) e  $k_0$  (39), na expressão (31), obtém-se a expressão final para o critério de cedência de Mohr:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{et}} + \frac{\sigma_3}{\sigma_{ec}} = 1 \quad (40)$$

O critério de Mohr pode ser interpretado como uma generalização do de Tresca. Quando se considera  $\phi = 0$ , as curvas intrínsecas do domínio elástico do plano de Mohr passam a ser retas paralelas ao eixo  $\sigma$  e, por conseguinte, as tensões limites de elasticidade, quer por tração ou compressão, são iguais. Por outro lado, ao substituir-se as tensões limite de elasticidade à tração e à compressão por  $\sigma_{et} = \sigma_e$  e  $\sigma_{ec} = -\sigma_e$  na equação (40) do critério de cedência de Mohr, obtém-se o de Tresca a partir da equação (14).

É de elevada importância verificar que a representação gráfica do critério de Mohr no plano das tensões principais  $\sigma_i, \sigma_j$ , com  $\sigma_k = 0$ , apresenta-se sob a forma de um hexágono distorcido, isto porque a tensão limite de elasticidade à tração é inferior à tensão limite de elasticidade de compressão. É importante referir que, em termos teóricos, o critério de Mohr também é utilizado para situações em que a tensão limite à tração é superior à tensão limite de elasticidade à compressão.

Na representação gráfica do critério de cedência de Mohr no espaço das tensões principais, resulta uma superfície limite de elasticidade piramidal, em que a secção em qualquer ponto é um hexágono irregular, conforme se pode verificar na representação gráfica da figura 4. A geometria piramidal da superfície limite de elasticidade indica que a entrada em domínio plástico não é independente do valor apresentado pela pressão hidrostática, que é o termo da tensão normal  $\sigma_p$  explicitamente definido na equação (29).

Por outro lado, o vértice da pirâmide da superfície limite de elasticidade ficará sobre a diagonal espacial das tensões principais, definida por  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , que corresponde ao estado de tensão em que as tensões de corte em qualquer plano são nulas, podendo a sua localização ser calculada a partir da equação (31), ou seja:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = k_0 \times \cotg \phi \quad (41)$$



## 2.4 – Critério de cedência de Drucker-Prager

À semelhança do que traduz o critério de Mohr-Coulomb, o critério de plasticidade de Drucker-Prager (1952) tem uma aplicação a materiais como o ferro fundido, o material cerâmico, o vidro e o betão. Aplica-se assim a materiais com comportamento mecânico do tipo frágil, cuja fractura surge no limite elástico ou para pequenas deformações plásticas.

O critério de Drucker-Prager corresponde a uma alteração do critério de von Mises, ao qual a influência das componentes da tensão hidrostática serão inseridas através de um termo que depende do primeiro invariante do tensor das tensões  $I_1$ :

$$\alpha I_1 + J_2^{1/2} = k^* \quad (42)$$

onde  $\alpha$  e  $k^*$  são variáveis que dependem do material utilizado e a sua determinação é realizada a partir de ensaios mecânicos.

A superfície limite de elasticidade, no espaço das tensões principais, definida por este critério, é representada por um cone de secção transversal circular, como se pode visualizar na figura 4. A curva limite de elasticidade resulta da intersecção de um plano arbitrário definido por  $\sigma_i + \sigma_j + \sigma_k = cte$ , podendo a superfície limite de elasticidade ser considerada uma circunferência nesse plano. A curva formada por esta circunferência contém os três vértices mais exteriores do hexágono distorcido de Mohr (ver figura 4) quando se verificam as seguintes relações:

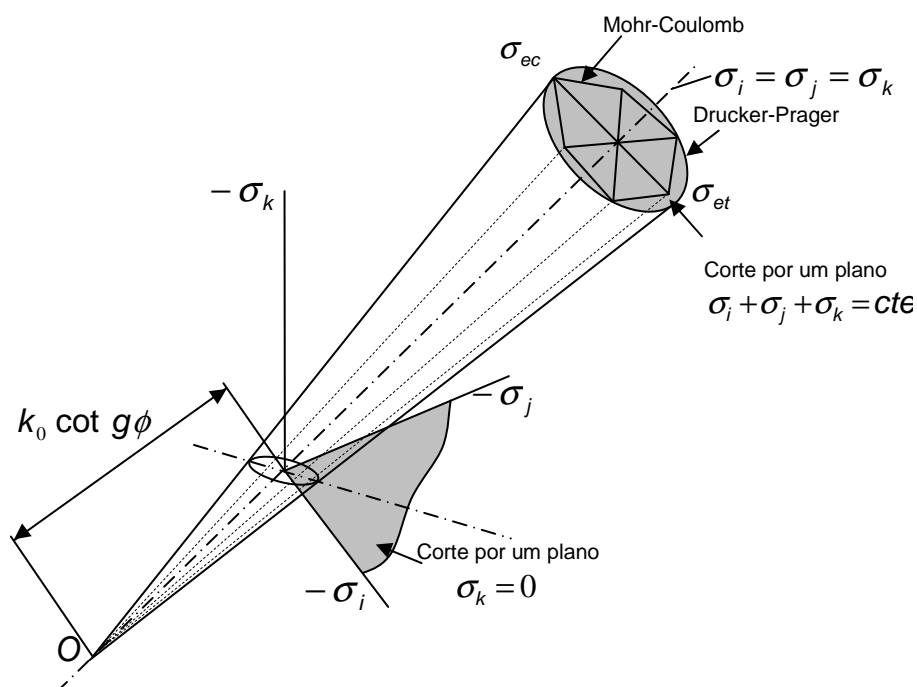
$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad (43)$$

$$k^* = \frac{6k_0 \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad (44)$$

Neste âmbito, as variáveis  $\phi$  e  $k_0$  dependem do tipo de material a utilizar, ou seja, dos ensaios mecânicos a realizar e são obtidas por uma metodologia semelhante à que foi definida para o critério de cedência de Mohr.

Por último, é importante referir que o critério de Drucker-Prager coincide com o critério de von Mises quando o parâmetro  $\alpha$  da equação (42) for zero.

Para finalizar a apresentação deste último critério representa-se na figura 4, o espaço das tensões principais, as superfícies limites de elasticidade de Mohr-Coulomb e de Drucker-Prager.



**Figura 4 – Representação geométrica da superfície limite de elasticidade de Mohr-Coulomb e de Drucker-Prager no espaço das tensões principais [11].**

## **2.5 – Critério de cedência de Cazacu para materiais HCP (Hexagonal Closed-Pack)**

O critério de cedência de Cazacu considera o escoamento macroscópico para materiais ortotrópicos, e pretende descrever a anisotropia e a assimetria existente entre a tensão limite de elasticidade à compressão e à tração. Este critério foi desenvolvido para ligas metálicas de estrutura cristalográfica designada por “Hexagonal Closed-Pack”, ou mais sucintamente designada por HCP, como são os casos das ligas de Magnésio e das ligas metálicas de Titânio. Este tipo de materiais apresentam um comportamento mecânico consideravelmente diferente quando solicitados à tração ou à compressão e esta é a principal razão de, neste trabalho, se estudar e implementar o critério de Cazacu para o estudo do comportamento mecânico do betão. Ainda, este critério tem a vantagem de poder ser utilizado em materiais metálicos, o que se traduz numa vantagem adicional se se quiser analisar o comportamento mecânico por exemplo do betão armado.

O critério de Cazacu permite ainda, ou foi também desenvolvido, para o estudo do escoamento plástico de materiais metálicos que evidenciam anisotropia plástica, isto é, materiais cujas propriedades mecânicas variam consoante a direção de aplicação das solicitações de carregamento. Isto deve-se ao facto de muitos desses materiais metálicos terem sido processados, ou fabricados, segundo processos, como por exemplo o caso da laminagem, onde os grãos ou os cristais adquirem direções preferenciais fazendo com que as propriedades mecânicas sejam diferentes segundo essas direções e transversais às direções de laminagem.

É possível verificar a descrição do critério de Cazacu que permite estudar o comportamento assimétrico de um material em termos de tensão de tração e compressão. Este critério de cedência a ser aplicado, neste trabalho ao betão, teve os seus primeiros estudos em 2001 por Cazacu e em 2003, Barlat deu continuidade ao trabalho iniciado [1].

Para melhor abordar o critério proposto por Cazacu e Barlat (2003), começa-se por apresentar o critério isotrópico, tendo como principal objetivo, explicar nesta fase como é que representa a assimetria entre os estados de tensão de tração e de compressão. Assim, o critério isotrópico de cedência de Cazacu e Barlat (2004)

é representado pela seguinte equação que define a superfície limite de elasticidade:

$$f \equiv (J_2)^{\frac{3}{2}} - cJ_3 = \tau_y^3 \quad (45)$$

onde  $\tau_y$  representa o limite para a tensão de elasticidade ao corte.

O segundo  $J_2$  e o terceiro  $J_3$  invariantes do tensor desviador das tensões são obtidos a partir do tensor das tensões de desvio que, por sua vez, são obtidas através do produto de um tensor  $\mathbf{T}$  (que é uma transformação linear) pelo tensor das tensões  $\boldsymbol{\sigma}$ , ou seja,  $\mathbf{S} = \mathbf{T}\boldsymbol{\sigma}$

Para efeitos de implementação numérica do critério de cedência de Cazacu, o tensor das tensões  $\boldsymbol{\sigma}$  vai ser escrito na forma vectorial:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} \quad (46)$$

onde as três primeiras componentes da tensão são as tensões normais e as últimas três são as de corte.

Pelo mesmo motivo, a matriz da transformação linear  $\mathbf{T}$  tem a seguinte forma:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ -1 & -1 & 2 & & & \\ & & & 3 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 3 \end{bmatrix} \quad (47)$$

na qual permite separar o tensor das tensões hidrostáticas do tensor das tensões de desvio.

O tensor das tensões de desvio **S** apresenta-se do seguinte modo:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ S_{xy} \\ S_{xz} \\ S_{yz} \end{bmatrix} \quad (48)$$

No seguimento do anteriormente mencionado, o segundo  $J_2$  e o terceiro  $J_3$  invariantes do tensor das tensões de desvio são obtidos a partir das expressões que se seguem:

$$J_2 = \frac{tr(\mathbf{S}^2)}{2} \quad (49)$$

e

$$J_3 = \frac{tr(\mathbf{S}^3)}{3} \quad (50)$$

onde  $tr(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^3 A_{kk}$ . Na equação (45), a constante do material  $c$  é expressa

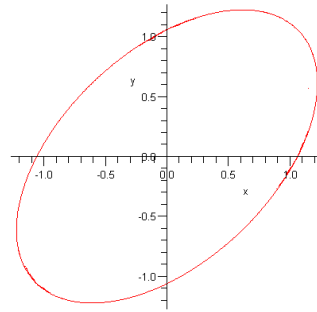
em termos da tensão uniaxial de compressão e de tração. Ambas as tensões referidas são determinadas a partir de ensaios mecânicos realizados experimentalmente.

De acordo com Cazacu [1], a constante material  $c$  vem definida da seguinte forma:

$$c = \frac{3\sqrt{3}(\sigma_T^3 - \sigma_C^3)}{2(\sigma_T^3 + \sigma_C^3)} \quad (51)$$

Esta constante vai ser responsável pela assimetria de comportamento entre os estados de tensão de tração e de compressão.

Se as tensões limite de elasticidade à tração e à compressão forem iguais, então a constante material  $c=0$ , o que implica que o critério de Cazacu se transforma no de von Mises. Neste caso, a representação gráfica do critério de cedência de Cazacu dá origem à mesma elipse que se obtém com von Mises e representa-se graficamente na figura 5.



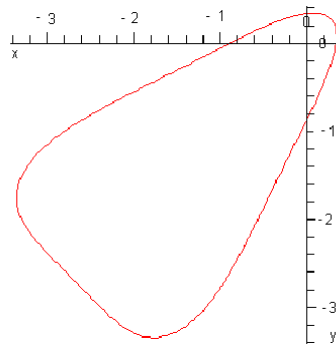
**Figura 5 – Superfície de plasticidade isotrópica.**

Para um estado plano de tensão, o critério de cedência de Cazacu pode ser escrito em função das tensões principais da seguinte forma:

$$\left[ \frac{1}{3} (\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2) \right]^{\frac{3}{2}} - \frac{c}{27} [2\sigma_1^3 + 2\sigma_2^3 - 3(\sigma_1 + \sigma_2)\sigma_1 \sigma_2] = \tau_Y^3 \quad (52)$$

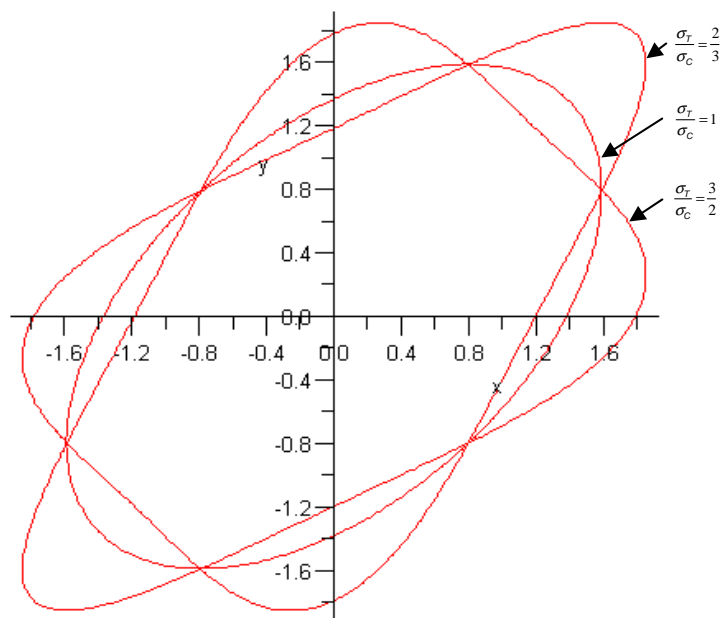
Para um valor da constante material  $c$  diferente de zero, a função de cedência de Cazacu da equação (52), representa-se graficamente em forma de triângulo arredondado, como se pode verificar através da representação gráfica da figura 6. Esta representação gráfica foi efetuada a título ilustrativo, fazendo variar o coeficiente do material  $c$  dentro de determinados valores admissíveis, conforme detalhado em Cazacu e Barlat (2004).

Conforme se pode observar pela figura 6, a superfície de cedência de Cazacu reproduz eficazmente a assimetria dos estados de tensão de tração e de compressão, pelo que se poderá dizer que este critério caracteriza eficazmente o comportamento mecânico do material betão.



**Figura 6 – Superfície de cedência de Cazacu para um material com assimetria de tensões.**

A partir da função de cedência de Cazacu da equação (52) é possível comparar a tensão de tração e compressão, podendo-se representar graficamente três situações distintas na figura 7.



**Figura 7 – Diferentes relações entre tensão de tração e de compressão para o critério de Cazacu.**

A figura 7 descreve 3 exemplos comparativos que relacionam a tensão de tração e de compressão. A curva 1 descreve uma relação entre  $\frac{\sigma_T}{\sigma_C}$  de  $\frac{3}{2}$ . A curva 2 tem uma relação entre a tensão de tração e compressão igual a 1 (von Mises). Por último a curva 3 representa um quociente de  $\frac{2}{3}$ .

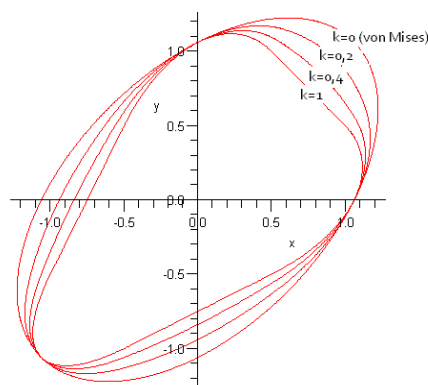
Neste trabalho, foi utilizada outra superfície de cedência de Cazacu que, além de considerar a assimetria entre os estados de tensão de tração e de compressão, considera também a anisotropia plástica do material. Isto permite uma maior flexibilidade na caracterização material do betão, nomeadamente na definição da superfície de cedência deste material através da utilização do critério de Cazacu.

A expressão matemática para o critério de cedência de Cazacu tendo em consideração a anisotropia plástica é a seguinte:

$$(|S_1| - kS_1)^a + (|S_2| - kS_2)^a + (|S_3| - kS_3)^a = F \quad (53)$$

em que k é expresso em termos das relações entre a tensão de tração e de compressão. Este critério considera que os valores limite para o k variam de -1 a 1. O valor do expoente a no critério da equação (53) deverá ser um número inteiro e maior ou igual a 1.

A partir da expressão (53), é possível descrever várias curvas para diferentes valores de k, conforme se apresenta esquematicamente na figura 8. Os valores de k que a figura seguinte apresenta são considerados a título de exemplo e comparativo, os seguintes: 0; 0,2; 0,4 e 1.

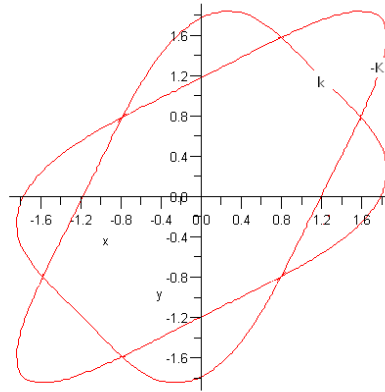


**Figura 8 – Comparação entre diferentes valores de k.**



Para as quatro curvas descritas na figura 8, utilizou-se um valor de  $a=2$ . A partir da mesma figura poder-se-á concluir que à medida que se aumenta o coeficiente  $k$  a assimetria entre os estados de tensão e de compressão é cada vez maior.

No seguimento da explicação dos parâmetros que constituem o critério de Cazacu, representa-se graficamente na figura 9 um exemplo prático da diferença na superfície de cedência entre um  $k$  positivo e negativo.



**Figura 9 – Valor de  $k$  positivo e negativo.**

Na equação (53),  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$  pretendem representar os valores das tensões principais de desvio. Para o tratamento da anisotropia plástica, o critério de Cazacu considera um novo tensor das tensões, designado por  $\Sigma$ , que é obtido por transformação linear do tensor das tensões de desvio da seguinte forma:

$$\Sigma = \mathbf{C}[\mathbf{S}] \quad (54)$$

em que  $\mathbf{C}$  corresponde a um tensor de transformação linear de quarta ordem constituído pelos coeficientes materiais de anisotropia. Tendo como base este novo tensor das tensões, o critério de cedência de Cazacu pode ser representado através da seguinte equação:

$$(|\Sigma_1| - k \Sigma_1)^a + (|\Sigma_2| - k \Sigma_2)^a + (|\Sigma_3| - k \Sigma_3)^a = F \quad (55)$$

onde,  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  são as tensões principais do tensor das tensões  $\Sigma$ .

A matriz  $C$  com os coeficientes materiais de anisotropia é constituída pelas seguintes variáveis materiais independentes,  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{13}$ ,  $C_{22}$ ,  $C_{23}$ ,  $C_{33}$ ,  $C_{44}$ ,  $C_{55}$  e  $C_{66}$  que estão intrinsecamente relacionadas com a anisotropia do material. Esta transformação linear é definida da seguinte forma:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & & & \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & & & \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ & & & & C_{55} & \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (56)$$

No estado plano de tensão, as componentes cartesianas de tensão consideradas como “input” para o critério de Cazacu são definidas por  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{xy}$ . As componentes cartesianas do tensor das tensões  $\Sigma$  podem ser obtidas diretamente a partir das componentes cartesianas  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{xy}$  e dos coeficientes materiais de anisotropia da seguinte forma:

$$\Sigma_{xx} = \left(\frac{2}{3}C_{11} - \frac{1}{3}C_{12} - \frac{1}{3}C_{13}\right)\sigma_{xx} + \left(-\frac{1}{3}C_{11} + \frac{2}{3}C_{12} - \frac{1}{3}C_{13}\right)\sigma_{yy} \quad (57)$$

$$\Sigma_{yy} = \left(\frac{2}{3}C_{12} - \frac{1}{3}C_{22} - \frac{1}{3}C_{23}\right)\sigma_{xx} + \left(-\frac{1}{3}C_{12} + \frac{2}{3}C_{22} - \frac{1}{3}C_{23}\right)\sigma_{yy} \quad (58)$$

$$\Sigma_{zz} = \left(\frac{2}{3}C_{13} - \frac{1}{3}C_{23} - \frac{1}{3}C_{33}\right)\sigma_{xx} + \left(-\frac{1}{3}C_{13} + \frac{2}{3}C_{23} - \frac{1}{3}C_{33}\right)\sigma_{yy} \quad (59)$$

$$\Sigma_{xy} = C_{66}\sigma_{xy} \quad (60)$$

Por sua vez, as tensões principais  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ , são facilmente obtidas a partir das componentes cartesianas do tensor das tensões, definidas nas equações anteriores, isto é:

$$\Sigma_1 = \frac{1}{2} \left( \Sigma_{xx} + \Sigma_{yy} + \sqrt{(\Sigma_{xx} - \Sigma_{yy})^2 + 4\Sigma_{xy}^2} \right) \quad (61)$$

$$\Sigma_2 = \frac{1}{2} \left( \Sigma_{xx} + \Sigma_{yy} - \sqrt{(\Sigma_{xx} - \Sigma_{yy})^2 + 4\Sigma_{xy}^2} \right) \quad (62)$$

$$\Sigma_3 = \Sigma_{zz} \quad (63)$$

Após a substituição das tensões principais das equações (61), (62) e (63) na equação (55) é possível definir matematicamente o critério de cedência de Cazacu, considerando a assimetria entre estados de tensão de tração e de compressão assim como a anisotropia plástica do material.

### 3– Solicitação biaxial do betão

O comportamento do betão tem alguma complexidade devido heterogeneidade, das propriedades dos materiais que o constituem. Deste modo, para um estudo o mais próximo da realidade, passa por serem consideradas as propriedades mais importantes e que melhor representam o comportamento do betão.

Um conceito relevante para o betão é o facto de a máxima resistência à tração corresponder a cerca de um décimo da resistência à compressão no que respeita a ensaios uniaxiais.

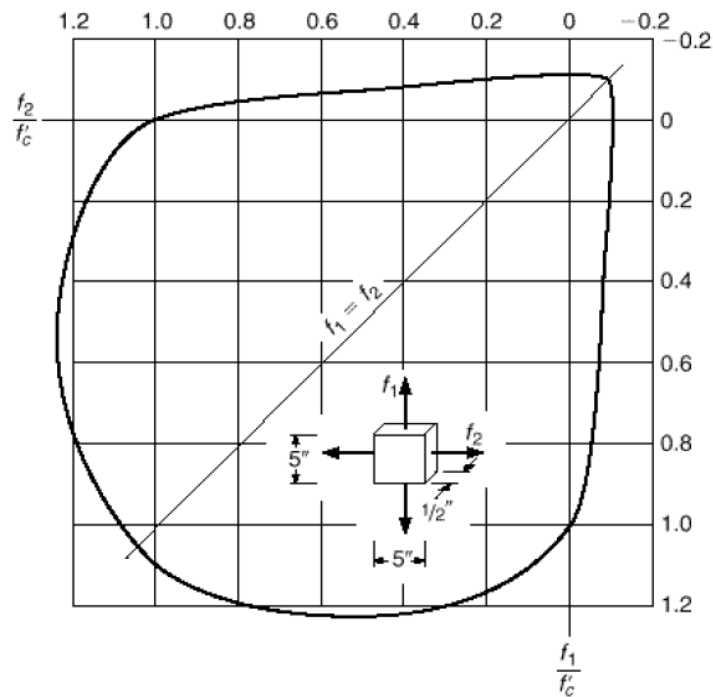
O betão pode estar sujeito a ações mais complexas, com tensões a atuar em várias direções denominando-se, por exemplo biaxiais, para o caso de as tensões actuarem em duas direções e triaxiais no caso das tensões a actuarem em três direções [5].

A partir do estudo realizado em [12] é possível verificar o comportamento mecânico do betão quando solicitado com um estado biaxial de tensão. Este estudo servir-nos-á de base para o trabalho que se pretende realizar permitindo a definição e caracterização dos parâmetros materiais necessários para o critério de cedência de Cazacu.

No estudo representado [12], é possível verificar a curva de cedência do betão descrita a partir de resultados de ensaios realizados em laboratório.

Para estados de compressão biaxial existe um acréscimo da capacidade resistente do betão em relação à capacidade obtida através do ensaio uniaxial.

A figura 10 representa a curva de cedência do betão para estados de tensão biaxial [12].



**Figura 10 – Resistência a estados de tensão biaxiais do betão [12].**

Por outro lado, através da figura 10, o valor da resistência de tração biaxial não é muito diferente para estados uniaxial de tração, embora se observe um ligeiro aumento em relação ao estado uniaxial [5].

Numa breve explicação da figura 10, para valores de  $\frac{f_1}{f'_c} = -0,18$  e  $\frac{f_2}{f'_c} = -0,18$ , por exemplo, ambos os valores estão fora da superfície de cedência, deste modo, o material encontra-se em rotura. Por outro lado se  $\frac{f_1}{f'_c} = -0,1$  e  $\frac{f_2}{f'_c} = -0,1$ , estes valores são considerados de tração. Para finalizar, quando  $\frac{f_1}{f'_c} = 0,2$  e  $\frac{f_2}{f'_c} = 0,2$  significa que o material está dentro da superfície de cedência ou seja em segurança.

#### **4 – Caracterização dos parâmetros materiais para o modelo numérico do critério de cedência de Cazacu**

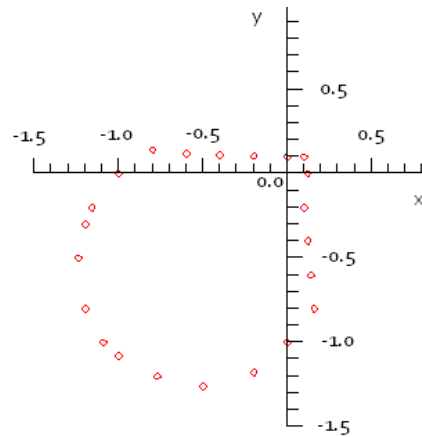
Numa primeira fase deste trabalho utilizou-se o programa “maple”, que permitiu efetuar operações matemáticas relativas ao critério de Cazacu, de modo a obter uma visualização gráfica da superfície de cedência e assim aferir os parâmetros numéricos para a caracterização do material betão.

O ponto de partida foi o de utilizar resultados experimentais de ensaios biaxiais do betão por forma a se caracterizar os coeficientes do critério de Cazacu que permitem a melhor definição matemática da superfície de cedência que se encaixa nos resultados experimentais dos ensaios biaxiais do betão.

Depois de obtida a referida caracterização dos parâmetros materiais do critério de Cazacu, procedeu-se à implementação de uma subrotina em linguagem de programação fortran, que foi totalmente integrada num programa comercial de análise por elementos finitos, designado por MSC.Marc [2]. A subrotina fortran que permite ser integrada no programa de cálculo MSC.Marc tem a designação de HYPELA2.

O MSC.Marc contém uma série de programas de análise numérica por elementos finitos integrados que facilitam a análise de inúmeros problemas de Engenharia, sobretudo na área estrutural, transferência de calor e eletromagnetismo. Este programa permite a integração de modelos materiais desenvolvidos pelo utilizador através de subrotinas em fortran, como é o caso da subrotina desenvolvida HYPELA2, permitindo assim uma flexibilidade enorme de integração dos modelos materiais desenvolvidos com toda a tecnologia numérica, proveniente do método dos elementos finitos, já existente no software MSC.Marc. Desta forma, este trabalho consistiu em desenvolver a subrotina HYPELA2 com o critério de cedência de Cazacu e utilizá-lo na simulação numérica de estruturas de betão a partir do software comercial MSC.Marc.

A partir do estudo efetuado em [12], foram retirados os valores experimentais que descrevem a curva de cedência do gráfico da figura 10. Esses pontos experimentais estão representados graficamente na figura 11.



**Figura 11 – Pontos que representam estados de tensão biaxiais do betão.**

A curva construída na figura 11 tem uma forma assimétrica o que está de acordo com a superfície de cedência que se pretende obter através da aplicação do critério de Cazacu.

Tendo em consideração os parâmetros e modo de proceder que estão inerentes ao critério de Cazacu e a partir dos resultados de ensaios realizados em laboratório, nomeadamente o ensaio de resistência à compressão, tração e o valor do módulo de elasticidade, procedeu-se à elaboração da curva de cedência para o betão.

Apresenta-se na tabela 1 as características de resistência em termos de valores médios, que se utilizou neste trabalho e serviu de base para a aplicação do critério de Cazacu na simulação do comportamento mecânico do betão. Estes dados foram registados a partir de ensaios realizados no Departamento e Engenharia Civil da Universidade de Aveiro [13].

**Tabela 1 – Propriedades mecânicas dos ensaios [13].**

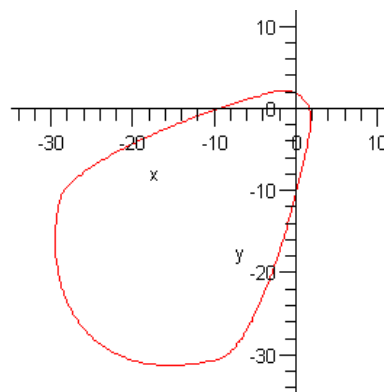
Betão	
$f_{cm}$ (MPa cubos)	23,8
$f_{ct}$ (MPa estimativa)	1,6
$E_c$ (GPa)	23,8
$\nu$ (coef. Poisson)	0,2

A curva de cedência do betão anteriormente referida tem como base as equações apresentadas a partir do capítulo 2.5 e que traduzem o critério de Cazacu. Às equações que constituem o critério de Cazacu, começou-se por ajustar os parâmetros de anisotropia, nomeadamente os  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{13}$ ,  $C_{22}$ ,  $C_{23}$ ,  $C_{33}$ ,  $C_{44}$ ,  $C_{55}$  e  $C_{66}$ , o expoente  $a$ , assim como os outros parâmetros materiais, o  $F$  e  $k$ , de modo que estejam de acordo com os valores obtidos pelos ensaios que a tabela 1 apresenta e descrevam uma curva semelhante à da figura 10.

Aos parâmetros anteriormente referidos, e tendo como base de comparação a figura 11, foram obtidos os seguintes valores para os parâmetros de anisotropia,  $C_{11} = -0,1$ ,  $C_{12} = 0,9$ ,  $C_{13} = -0,5$ ,  $C_{22} = -0,025$ ,  $C_{23} = -0,5$ ,  $C_{33} = -0,5$  e  $C_{66} = 1,0$ , e para  $k = -0,61$ ,  $F = 50$  e  $a = 2,0$ . Estes valores para os parâmetros foram obtidos através de tentativa-erro até se construir ou obter o melhor “fitting” para a curva de cedência experimental do betão.

Aos parâmetros de  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{yy}$  que se encontram nas expressões (57), (58), (59) e (60) foram adicionados os seguintes valores,  $\sigma_{xx} = \sigma_{xx} + 4,29$  e  $\sigma_{yy} = \sigma_{yy} + 4,30$ , representando assim uma translação da curva de cedência no espaço das tensões principais. Este procedimento é, de certa forma, equivalente a se considerar um tipo de endurecimento cinemático que se pode definir como um movimento de translação da superfície de cedência no espaço das tensões principais por forma a considerar o encruamento do material em regime plástico. Com este procedimento, conseguiu-se caracterizar de forma mais exata os parâmetros materiais para o critério de cedência de Cazacu e assim reproduzir de forma mais efetiva o “fitting” dos valores experimentais que a figura 11 apresenta, combinado com as propriedades do material apresentadas pela tabela 1.

O resultado final da caracterização dos parâmetros materiais do critério de cedência de Cazacu está descrito graficamente na figura 12.



**Figura 12 – Representação do critério de Cazacu aplicado ao betão.**

## **5 – Modelos e resultados numéricos**

### **5.1 – Método dos Elementos Finitos**

Foi por volta de 1950 que começou a ser aplicado o método dos elementos finitos para análise estrutural, aplicado sobretudo na indústria aeroespacial e energia nuclear, com o objetivo de fazer uma redução dos custos dos componentes estruturais, mantendo o bom desempenho mecânico, com um elevado factor de segurança nos resultados obtidos. Usualmente, este método aplica-se a problemas de análise em Engenharia e projeto, sobretudo quando é exigido um elevado grau de complexidade de geometria nos modelos materiais a utilizar [14].

Dos vários métodos de aproximação existentes, o de elementos finitos distingue-se pela elevada exatidão dos resultados obtidos, pelo fácil manuseio, robustez e versatilidade. Este método é uma importante ferramenta computacional que permite executar cálculos que, na prática, seriam muitos difíceis ou mesmo impossíveis de se obter de outro modo. O método dos elementos finitos consiste, de um modo geral, em resolver problemas físicos envolvendo várias estruturas ou componentes estruturais, sujeitos a um determinado e adequado carregamento e condições de fronteira.



Para o sucesso da utilização do método de elementos finitos na resolução de problemas matemáticos e físicos deve ter-se o cuidado de escolher os elementos adequados para o problema em análise (por exemplo, elementos do tipo placa, casca, elementos para estado plano de tensão e de deformação, elementos para estado de tensão 3D completo, etc.), a dimensão ou refinamento da malha, os parâmetros de solução, por forma a estarem de acordo com o tipo de problema, estrutura, cargas e condições de fronteira associadas, etc. Tendo em conta que o método dos elementos finitos é um procedimento numérico, é necessário avaliar com muita precisão a solução obtida. No caso de o objetivo não estar a ser atingido poder-se-á, por exemplo, optar pela solução numérica que passa pelo refinamento da malha, de modo a se conseguir um resultado mais fiável.

No modelo de elementos finitos é necessário definir as condições de fronteira que passam por aplicar, por exemplo, encastramentos, apoios simples e/ou duplos e definir os carregamentos, podendo estes, a título de exemplo, ser cargas pontuais nos nós dos elementos, carregamentos de pressão nas faces dos elementos, tipo forças de unidade de comprimento, etc., dependendo da solicitação a que a estrutura esteja sujeita.

Cada elemento finito define um volume elementar do corpo em estudo e é constituído por nós e pontos de integração, geralmente designados por pontos de Gauss [15]. Nos nós ou pontos nodais, calculam-se os deslocamentos e nos pontos de integração determinam-se os campos de deformação e de tensão do elemento, a partir do campo dos deslocamentos previamente obtidos nos pontos nodais do elemento [14].

A partir da teoria da elasticidade ou relações da lei de Hooke, determina-se a energia de deformação armazenada em cada elemento finito, minimizando esse valor em relação aos deslocamentos ou graus de liberdade, dos nós dos elementos que são as incógnitas do problema [14].

Atualmente, o método dos elementos finitos é aplicado não só ao cálculo estrutural, mas também em diversas áreas como a transferência de calor, escoamento de fluidos, eletromagnetismo, etc [2].

Neste trabalho, apresentam-se modelos estruturais a três dimensões que tem como intuito a realização de uma análise estrutural a partir do método de elementos finitos, aplicando-se para o efeito o critério de cedência de Cazacu ao betão, com o objetivo de se estudar o comportamento mecânico do material,

nomeadamente no que diz respeito ao estudo da assimetria, bem como os respectivos pontos críticos da estrutura. Da mesma forma, pretende-se comparar as soluções obtidas para o comportamento mecânico do betão utilizando o critério de cedência de Cazacu e comparar as soluções obtidas com o critério de von Mises.

## **5.2 – Validação numérica do modelo implementado**

Como foi anteriormente referido, o principal objectivo deste trabalho passa por aplicar o critério de cedência de Cazacu ao betão e comparar os resultados obtidos com os resultados provenientes da utilização de von Mises. Para tal, procedeu-se ao estudo de três exemplos práticos de cálculo estrutural, tendo-se verificado a importância da utilização do critério de cedência de Cazacu para se prever a localização e magnitude das zonas críticas da estrutura.

Após a simulação numérica dos modelos considerados, analisou-se cada elemento da malha de elementos finitos quanto à distribuição das tensões, por forma a se poder verificar a diferença de previsões do comportamento mecânico que são indicadas pelos dois critérios de cedência em análise.

Para efeitos de simulação numérica dos três exemplos propostos, considerou-se o módulo de Young do betão de 23,8 GPa (calculado experimentalmente) e um coeficiente de Poisson de 0,2.

Os elementos finitos utilizados neste trabalho foram do tipo casca, onde cada um é constituído por quatro nós e, em cada nó, existem seis graus de liberdade, nomeadamente três translações e três rotações em torno de um sistema de eixos local nodal. Assim, cada elemento finito do tipo casca utilizado nesta análise apresenta um total de 24 graus de liberdade. O elemento usado consta no manual do programa comercial MSC.Marc [2] como sendo o elemento com código interno 140 [16] integração numérica reduzida e com estabilização dos modos de energia nulos. A utilização deste elemento neste trabalho foi mais orientada para exemplos planos, onde houve a necessidade de se restringir os graus de liberdade associados ao deslocamento transversal e os graus de liberdade associados às rotações que induzem deformações de flexão. Pode-se assim dizer que as

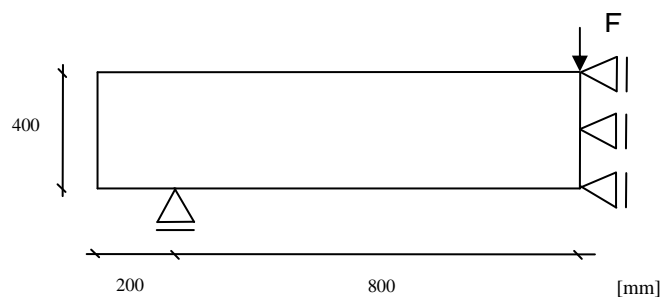
deformações consideradas com a utilização do elemento 140 [16] nestas condições são essencialmente deformações de membrana.

### 5.2.1 – Flexão de uma viga em três pontos

O comportamento à flexão de uma viga em betão é avaliado a partir da solicitação da mesma em três pontos distintos.

Neste exemplo pretende-se estudar o comportamento à flexão de uma viga em betão em três pontos distintos: uma força aplicada a meio vão e dois apoios a uma determinada distância das extremidades. Para esta simulação vai-se considerar apenas metade da viga, aplicando-se condições fronteira de simetria a meio vão.

A figura 13 representa a geometria de metade da viga, com as condições de fronteira aplicadas assim como o carregamento.

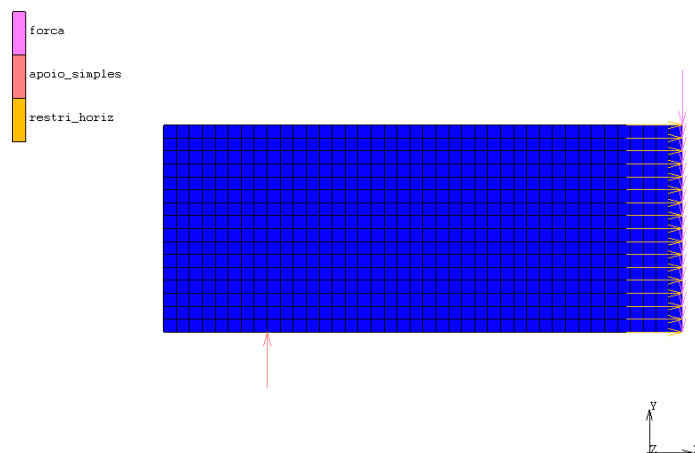


**Figura 13 – Representação do ensaio de flexão**

O apoio simples colocado perto da extremidade da viga permite que ocorram rotações no plano longitudinal da viga e, ao mesmo tempo, restringe os movimentos verticais. O movimento longitudinal é restringido pelas condições de simetria da viga a meio vão.

O estudo a efetuar vai permitir obter a máxima resistência à tração em flexão e comparar as soluções obtidas a partir do critério de cedência de Cazacu aplicado ao betão com o de von Mises. A força vertical  $F$  aplicada à viga tem o valor de 235294 N. A área da secção transversal da viga tem a dimensão de 400x400mm.

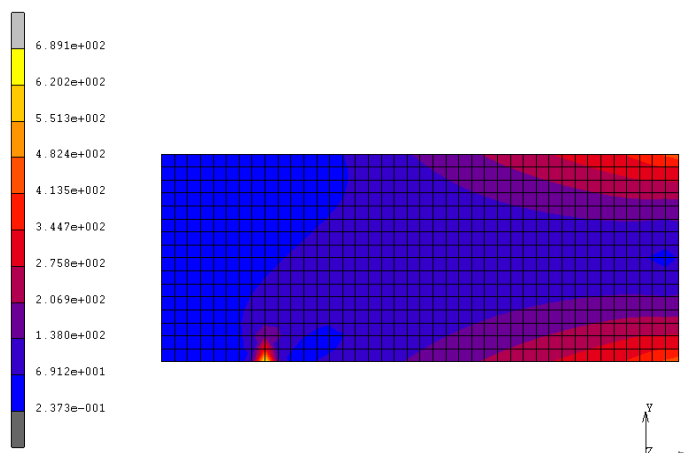
A figura 14 representa as condições de carregamento e de fronteira, bem como o número de elementos finitos (640) considerados na análise.



**Figura 14 – Representação de condições de fronteira, carregamentos e número de elementos.**

Novamente, o tipo de elemento finito utilizado nesta análise foi de casca, o 140 do programa MSC.Marc, com integração reduzida e estabilização dos modos de energia nulos [16]. Foram novamente bloqueados os graus de liberdade relativos ao deslocamento transversal e às rotações nodais, pelo que a análise efetuada aplica-se a estado plano de tensão com deformações maioritariamente de membrana.

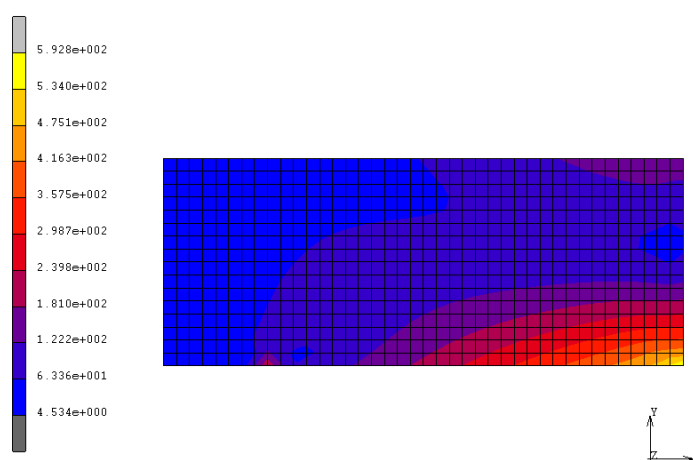
Na figura 15 representa-se a distribuição de tensões aplicando o critério de cedência de von Mises.



**Figura 15 – Distribuição da tensão equivalente de von Mises.**

Como se pode verificar através da análise da figura 15, não existe novamente qualquer tipo de diferença na distribuição da tensão equivalente de von Mises para as fibras da viga à compressão (fibras superiores) e para as fibras da viga à tração (fibras inferiores).

A figura 16 apresenta a distribuição da tensão equivalente utilizando o critério de Cazacu. Conforme se verifica na figura 16, as fibras à tração são as que apresentam valores mais críticos para a tensão equivalente proveniente do critério de cedência de Cazacu, verificando-se assim a assimetria no comportamento da viga de betão à tração e à compressão.



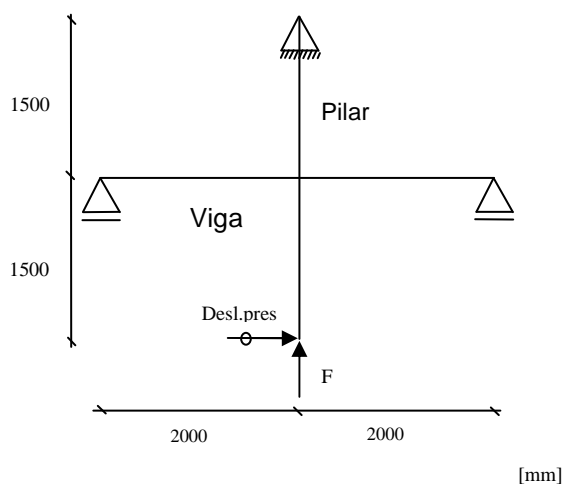
**Figura 16 – Distribuição de tensões aplicando o critério de Cazacu.**

À semelhança do estudo realizado no modelo anterior, a tensão equivalente de von Mises tem um valor máximo de 689,10 MPa. Por outro lado, para o caso do critério de Cazacu, o valor máximo de tensão equivalente é de 592,80 MPa.

### **5.2.2 – Ligação viga-pilar**

As vigas e os pilares deformam-se naturalmente sob ação do peso próprio, das cargas permanentes e acidentais a que estão sujeitos, bem como da retração e deformação lenta do material, que no caso deste trabalho é o betão. A título de curiosidade, o betão admite flechas que podem não comprometer em nada a sua estética, estabilidade e resistência. Estas flechas terão que ser compatíveis com a capacidade de deformação dos componentes que integram as estruturas das edificações.

Nesta parte do trabalho, pretende-se realizar uma análise numérica do comportamento de uma tipologia de ligação entre uma viga e um pilar em betão, comumente designado por nó viga-pilar. Para tal, a figura 17 mostra a representação esquemática da ligação estrutural considerada, com as respectivas dimensões, condições de fronteira e carregamentos aplicados.



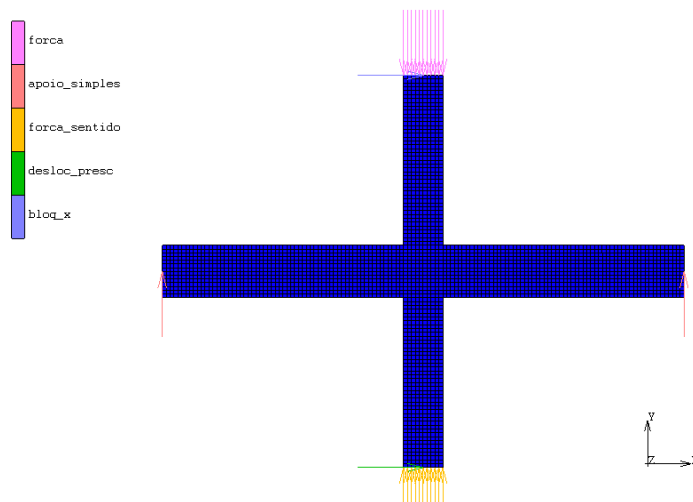
**Figura 17 – Condições de fronteira e carregamentos da ligação viga-pilar.**

A estrutura da figura 17 foi retirada de um estudo realizado pelo Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Aveiro [13]. Neste trabalho, a ligação viga-pilar refere-se a uma estrutura em betão, sem armadura, onde a zona de ligação (ou nó) é considerada crítica em termos de pontos, uma vez que, devido à elevada concentração de tensões, é nessa zona que existe uma maior probabilidade de ocorrerem danos significativos quando a estrutura está sujeita a diferentes tipos de carregamentos.

As dimensões para a secção da viga são de 400x300 mm e as dimensões para o pilar são de 300x300mm. Este modelo é submetido a uma força vertical axial com o valor de 18273 N na base do pilar. Este valor da força foi atribuído a partir de resultados de ensaios realizados no Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Aveiro [13]. Foi também aplicado um deslocamento prescrito (deslocamento lateral na base do pilar) de 20 mm. O modelo numérico para o nó viga-pilar contempla também apoio duplo na parte superior do pilar. De igual modo, a viga está impedida de se deslocar na direção vertical em ambas as suas extremidades.

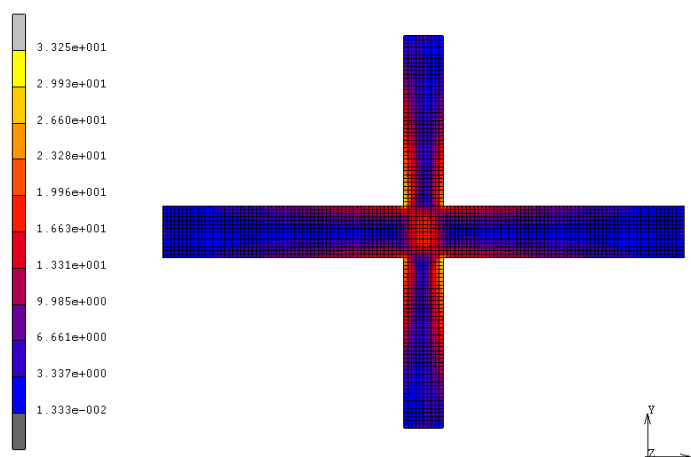
O objetivo do estudo estrutural apresentado visa avaliar a capacidade de reprodução do critério de cedência de Cazacu ao betão através da ligação estrutural viga-pilar, e representar o comportamento assimétrico para estados de tração e compressão e respectivos pontos críticos.

A figura 18 representa as condições de fronteira da estrutura viga-pilar, bem como a respectiva divisão em elementos, apresentando um total de 2756 elementos.



**Figura 18 – Representação de condições de fronteira, carregamentos e número de elementos.**

A figura 19 apresenta a distribuição da tensão equivalente de von Mises, aplicada à ligação viga-pilar.

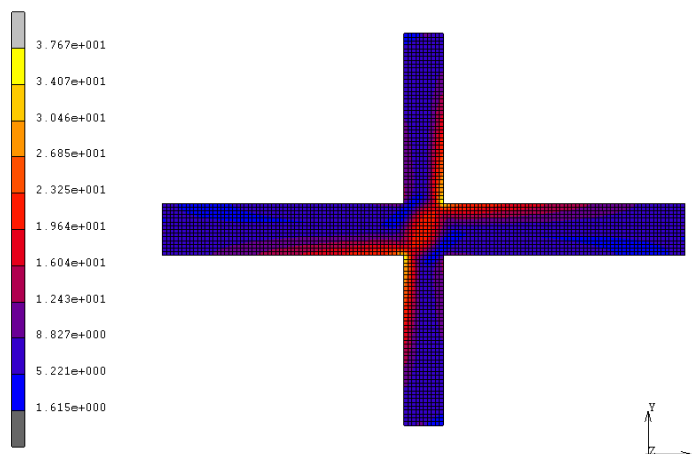


**Figura 19 – Distribuição da tensão equivalente de von Mises.**

Como se verifica na figura 19, é possível visualizar uma simetria em termos de tensões de tração e compressão, bem como os pontos críticos na zona de ligação viga-pilar. Este resultado permite concluir que o critério de von Mises não consegue distinguir o diferente comportamento do betão quando solicitado com esforços de tração e de compressão e, assim sendo, torna-se inadequado para prever e localizar as zonas críticas da estrutura que apresentam maior risco de fractura.

De seguida apresenta-se a mesma ligação viga-pilar, aplicando-se agora o critério de Cazacu. Na figura 20 é possível visualizar a assimetria deste material em termos de tensão à tração e compressão. Conforme se pode constatar pelos resultados da distribuição da tensão equivalente na figura 20, com a utilização do critério de cedência de Cazacu, as zonas críticas são aquelas que estão sujeitas a estados de tensão de tração, estando assim em sintonia com a assimetria à tração e compressão que é esperada ao utilizar-se o critério de Cazacu.

Na figura 20 representa-se a distribuição de tensões aplicando o critério de cedência de Cazacu.



**Figura 20 – Distribuição de tensões aplicando o critério de Cazacu.**

Em relação à análise do estado de tensão equivalente de von Mises, este tem um valor máximo de tensão instalado de 32,25 MPa e no caso do critério de Cazacu, tem um valor máximo de tensão de 37,67 MPa. De notar que as zonas de maior tensão estão situadas precisamente nos pontos críticos esperados ou seja nas zonas de ligação entre a viga e o pilar.

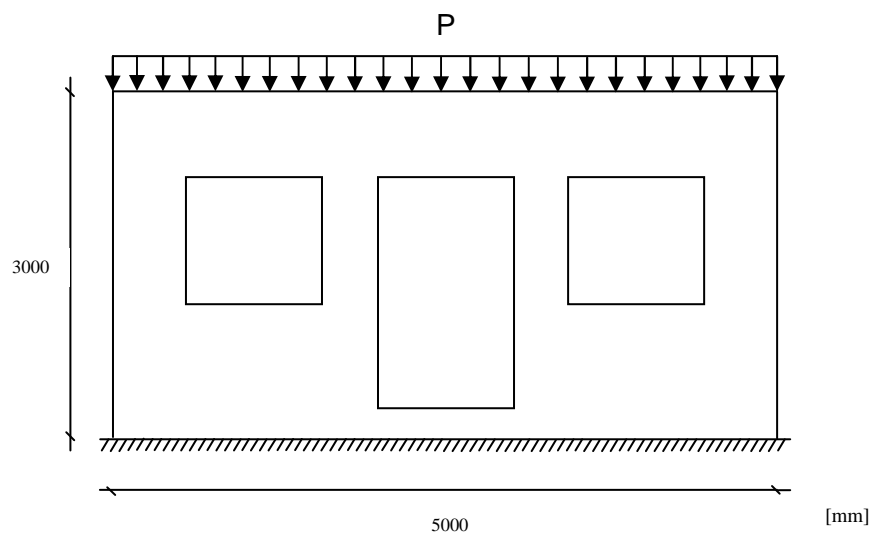


### 5.2.3 – Viga-parede

Uma viga-parede em betão é considerada um elemento estrutural cujo comportamento pode assemelhar-se ao de uma viga, ou seja, tem uma geometria idêntica a uma parede, mas a nível de solicitação de cargas verticais tem um funcionamento idêntico ao de uma viga. O objetivo deste exemplo é o de se considerar uma aplicação estrutural mais complexa e aferir o comportamento estrutural proveniente da utilização do critério de cedência de Cazacu.

A figura 21 representa a distribuição esquemática das condições de fronteira e carregamentos aplicados à estrutura da viga-parede.

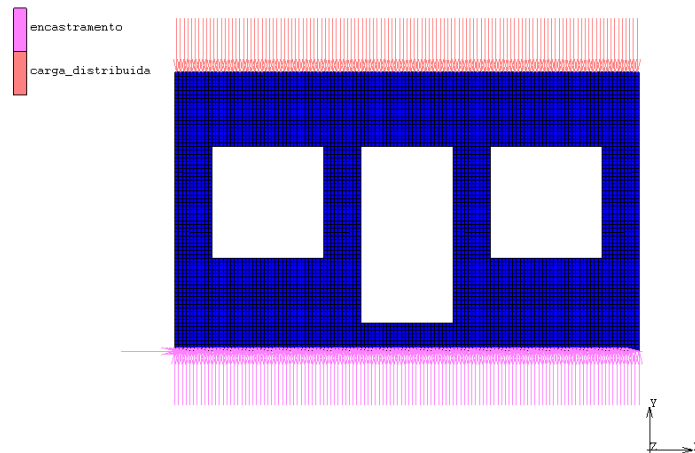
A viga-parede é solicitada por uma carga distribuída de 31,25 kN/m e é encastrada na parte inferior, como se pode observar novamente pela figura 21. Esta carga aplicada na viga-parede foi atribuída tendo em vista a obtenção de resultados cuja interpretação deve ser vista de modo qualitativo, ou seja, com o objetivo de se identificar os pontos críticos que são previstos pela utilização do critério de cedência de von Mises e pela utilização do critério de Cazacu.



**Figura 21 – Distribuição dos carregamentos e condições de fronteira da viga-parede.**

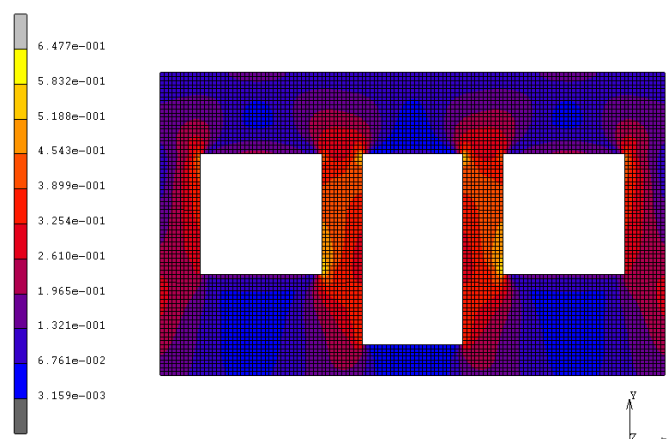
A figura 22 representa as condições de carregamento e fronteira que se considerou na estrutura viga-parede e mostra a sua divisão em elementos finitos (6400) do tipo casca (elemento 140 do manual do MSC.Marc).

A espessura adotada para a viga-parede é de 300mm.



**Figura 22 – Representação de condições de fronteira, carregamentos e número de elementos.**

Apresenta-se, na figura 23, a distribuição da tensão equivalente de von Mises. Conforme se pode verificar pela figura 23, existe uma simetria total para a tensão equivalente, o que era de certa forma esperado já que o critério de von Mises não diferencia o comportamento à tração do comportamento à compressão.

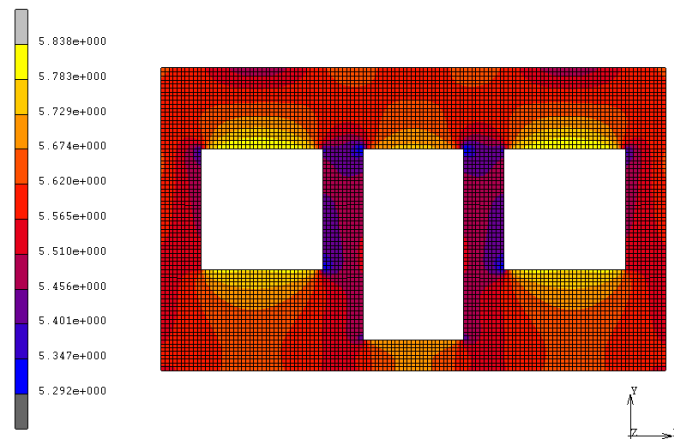


**Figura 23 – Distribuição da tensão equivalente de von Mises.**

É possível obter o valor máximo de tensão (ponto crítico) que corresponde a 0,648 MPa para a tensão equivalente de von Mises. Os pontos críticos encontram-

se nas zonas dos cantos das aberturas das portas e janelas, que são os locais com maior concentração de tensões.

No seguimento do que se tem vindo a apresentar, mostra-se na figura 24 a distribuição da tensão equivalente segundo o critério de cedência de Cazacu.



**Figura 24 – Distribuição de tensões aplicando o critério de Cazacu.**

O valor máximo de tensão obtida é de 5,838 MPa (ponto crítico) para a distribuição de tensões. Verifica-se neste caso que as zonas mais críticas são as zonas localizadas na parte superior das janelas, pois nestas zonas o modelo estrutural representado é equivalente ao de uma viga à flexão, estando as fibras sujeitas a um estado de tensão de tração. Isto significa que segundo o critério de cedência de Cazacu, serão estas zonas as que irão em primeiro lugar ceder, representando assim as zonas mais críticas da estrutura viga-parede.

Após a apresentação dos resultados, é possível concluir que o objetivo foi conseguido, ou seja, aplicou-se o critério de cedência de Cazacu a estruturas complexas constituídas pelo material betão, verificando-se uma assimetria notória em termos de tensão de tração e compressão. Ainda, se comparou o critério de Cazacu com um muito utilizado nos metais, e que corresponde ao já anteriormente citado, o de von Mises.

## **6 – Conclusão**

A avaliação do comportamento de estruturas de betão foi efetuada utilizando modelos de cálculo baseados no método dos elementos finitos e um novo critério de cedência, que é o critério de Cazacu.

O critério de cedência de Cazacu tem vindo a ser muito utilizado nos metais, nomeadamente aqueles com estrutura cristalográfica hexagonal compacta, tendo a sua aplicação ao estudo do comportamento do betão realizada com sucesso neste trabalho. Verificou-se que os resultados obtidos com o critério de Cazacu permitem identificar as zonas críticas de cedência do betão, nos locais corretos, o que não acontece com o de von Mises, que foi utilizado para comparação neste trabalho.

Para se poder aplicar o critério de Cazacu ao estudo do comportamento do betão, foi necessário proceder-se à caracterização mecânica dos diversos parâmetros materiais constituintes do critério de cedência. Para o efeito, utilizou-se bibliografia e resultados de ensaios mecânicos biaxiais já existente e procedeu-se à determinação dos parâmetros materiais do critério através de um “fitting” da curva de cedência do critério de Cazacu com os resultados experimentais existentes.

Neste trabalho implementou-se, em linguagem de programação fortran, o critério de Cazacu numa subrotina material do programa MSC.Marc. Esta subrotina foi utilizada na simulação numérica de três exemplos práticos de estruturas de betão e verificou-se que os resultados obtidos com este novo critério de cedência permitem aferir de forma exata a localização das zonas críticas da estrutura. Desta forma, pode-se concluir que o objetivo de desenvolver, implementar e utilizar o critério de cedência de Cazacu em estruturas de betão foi plenamente conseguido.

## **7 – Perspectiva de futuros trabalhos**

Com o objetivo de dar continuidade ao estudo realizado e que consistiu em aplicar o critério de cedência de Cazacu ao betão, poder-se-á, como nota para futuros trabalhos, aplicar o mesmo para combinações do betão com metais, como

é o exemplo do betão armado. Desta forma, o mesmo critério de Cazacu pode ser utilizado para prever o comportamento mecânico de ambos os materiais, traduzindo-se assim numa muito maior flexibilização do processo de simulação numérica e cálculo estrutural.

Outra perspectiva de trabalhos futuros diz respeito à utilização do critério de cedência de Cazacu para o desenvolvimento de critérios de rotura para o betão e também o desenvolvimento de algoritmos de propagação arbitrária de fendas. Uma vez que o comportamento mecânico do betão pode ser aproximado a um comportamento do tipo frágil, a teoria da mecânica da fractura a utilizar para a propagação arbitrária de fendas seria a teoria baseada na mecânica da fractura linear elástica.

## Referências bibliográficas

- [1] Cazacu, O., Plunkett, B., Barlat, F., 2006. Orthotropic yield criterion for hexagonal closed packed metals. Int. J. Plasticity 22, p.1171-1194.
- [2] Manual do MSC.Marc, 2010. Volume A: "Theory and user information".
- [3] AveiroDomus: 1.º Relatório realizado no âmbito do Projeto "Casa do Futuro", sub-projeto de "Engenharia Civil", Janeiro 2006.
- [4] Serigrafia em Betão (2003): Construlink. Disponível em:  
[http://www.construlink.com/Homepage/2003\\_ConstrulinkPress/Ficheiros/MonografiasPrimeirasPaginas/serig\\_v6pg\\_23\\_04\\_03.pdf](http://www.construlink.com/Homepage/2003_ConstrulinkPress/Ficheiros/MonografiasPrimeirasPaginas/serig_v6pg_23_04_03.pdf)  
Consultado em: 30-05-2011.
- [5] Coutinho, A. S., 1997. Fabrico e Propriedades do Betão, 3ª ed. Vol. 1, Lisboa: Laboratório Nacional de Engenharia Civil.
- [6] Eurocódigo 2 (EC2) (norma EN 1992) Dimensionamento de estruturas de betão, 2004.
- [7] Arlan Pacheco Figueiredo; "Análise da solidificação de ligas de magnésio para aplicação na fabricação", Porto Alegre, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Dissertação para a obtenção do título de Mestre em Engenharia.
- [8] T4 – Ligas não ferrosas: Disponível em:  
<https://woc.uc.pt/dem/class/getmaterial.do?idclass=396&idyear=6>  
Consultado em: 17-05-2011.
- [9] Carlos A. G. de Moura Branco, Mecânica dos Materiais, 2ª edição, Fundação Calouste Gulbenkian.
- [10] V.Dias da Silva, Mecânica e Resistência dos Materiais, EDILIBER EDITORA.
- [11] Rodrigues, J. e Martins, P., 2005. Tecnologia Mecânica Vol. I: Escolar Editora.

[12] Nilson-Darwin-Dolan, 2004. Design of Concrete Structures, Thirteenth Edition, 2 Materials. McGraw-Hill Higher Education.

[13] Fernandes, C., Melo, J., Varum, H., Costa, A., 2011. Análise comparativa do comportamento cíclico de nós viga-pilar com armadura lisa e nervurada. Revista IBRACON de Estruturas e Materiais, Volume 4, p. 147-172.

[14] Mecânica Exacta, S. A.: Relatório sobre optimização da estrutura de duas prensas projectadas, 2010. Realizado pelo Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro.

[15] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R.L., 2006. The Finite Element Method; Its basis & Fundamentals, Elsevier.

[16] Cardoso, R., Yoon, J., Grácio, J., Barlat, F., César de Sá, J., 2002. Development of a one point quadrature shell element for non linear applications with contact and anisotropy. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 191, p. 5177-5206.

## Anexo - subrotina em fortran

```

c   MARC implementation
c   -----
c
c   subroutine hypela2(d,g,e,de,s,t,dt,ngens,n,nn,kc,mats,ndi,nshear,
2       disp,dispt,coord,ffn,frotn,strechn,eigvn,ffn1,
3       frotn1,strechn1,eigvn1,ncrd,itel,ndeg,ndm,
4       nnode,jtype,lclass,ifr,ifu)
c
c   implicit real*8 (a-h,o-z)
c
c   Marc variables
c   -----
c   dimension e(*),de(*),t(*),dt(*),g(*),d(ngens*),s(*)
c   dimension n(2),coord(ncrd*),disp(ndeg*),
c   *         dispt(ndeg*),ffn(itel*),frotn(itel*),
c   *         strechn(itel),eigvn(itel*),ffn1(itel*),
c   *         frotn1(itel*),strechn1(itel),eigvn1(itel*)
c
c   Local variables
c   -----
c   dimension esp(3),cmatl(3,3),sn(3),stran(3)
c
c   common /ki_select/i_hard,i_yield,i_plo
c   common /ksh_mtl/ams1,ams2,ams3,y_0
c   common /yld2_1/a11,a12,a13,a14,a15,a16,a17,a18,pem
c   common /kbarlat/bc1,bc2,bc3,bc6,alx,aly,alz0,alz1,em
c   common /kazacubetao/c11,c12,c13,c22,c23,c33,c66,ck,ca,cx,cy
c
c   ntens = ndi+nshear
c
c   i_hard = 1
c   i_yield = 3
c
c   Young's modulus and Poisson's ratio
c   -----
c   young = 23800.0
c   xnu   = 0.2
c
c   Initial yield stress and hardening coefficients
c   -----
c   y_0 = 500.0d10
c   ams1 = 4500.0d10
c   ams2 = 0.111111
c   ams3 = 1.0
cc
c   if(i_yield.eq.3) then
c
c       c11 = -0.1
c       c12 = 0.9
c       c13 = -0.5
c       c22 = -0.025
c       c23 = -0.5
c       c33 = -0.5
c       c66 = 1.0
c       ck  = -0.61
c       ca  = 2.0
c       cx  = 4.29
c       cy  = 4.30
c   endif

```



```

c      flag for Backward-Euler method
c      -----
c      i_plo = 1
c
c      strains in marc
c      -----
c      if(ndi.eq.3.and.nshear.eq.3) then
c          esp(1) = de(1)
c          esp(2) = de(2)
c          esp(3) = de(3)
c          esp(4) = de(4)
c          esp(5) = de(5)
c          esp(6) = de(6)
c          sn(1) = s(1)
c          sn(2) = s(2)
c          sn(3) = s(3)
c          sn(4) = s(4)
c          sn(5) = s(5)
c          sn(6) = s(6)
c      elseif(ndi.eq.2.and.nshear.eq.1) then
c          esp(1) = de(1)
c          esp(2) = de(2)
c          esp(3) = de(3)
c          sn(1) = s(1)
c          sn(2) = s(2)
c          sn(3) = s(3)
c      elseif(ndi.eq.3.and.nshear.eq.1) then
c          esp(1) = de(1)
c          esp(2) = de(2)
c          esp(3) = de(4)
c          sn(1) = s(1)
c          sn(2) = s(2)
c          sn(3) = s(4)
c          ntens = 3
c      endif

c      State variables in Marc
c      -----
c      xp_ep = t(2)
c
c      -----
c      define elastic modulus tensor for plane stress
c      -----

c      if(ndi.eq.2.and.nshear.eq.1) then
c          do ii=1,3
c              do jj=1,3
c                  cmatl(ii,jj)=0.0
c              enddo
c          enddo
c          p1 = young/(1.0 - xnu*xnu)
c          p2 = young/(1.0 + xnu)
c          p3 = p2/2.0
c          cmatl(1,1) = p1
c          cmatl(1,2) = p1*xnu
c          cmatl(2,2) = cmatl(1,1)
c          cmatl(3,3) = p3
c          cmatl(2,1) = cmatl(1,2)
c          cmatl(3,1) = cmatl(1,3)
c          cmatl(3,2) = cmatl(2,3)
c      elseif(ndi.eq.3.and.nshear.eq.3) then
c          do ii=1,6
c              do jj=1,6
c                  cmatl(ii,jj)=0.0
c              enddo
c          enddo

```

```

        enddo
        p1 = young*(1.0-xnu)/((1.0+xnu)*(1.0-2.0*xnu))
        p2 = p1*xnu/(1.0-xnu)
        p3 = p1*(1.0-2.0*xnu)/(2.0*(1.0-xnu))
        cmatl(1,1) = p1
        cmatl(1,2) = p2
        cmatl(1,3) = p2
        cmatl(2,1) = p2
        cmatl(2,2) = p1
        cmatl(2,3) = p2
        cmatl(3,1) = p2
        cmatl(3,2) = p2
        cmatl(3,3) = p1
        cmatl(4,4) = p3
        cmatl(5,5) = p3
        cmatl(6,6) = p3

elseif(ndi.eq.3.and.nshear.eq.1) then
    do ii=1,3
do jj=1,3
        cmatl(ii,jj)=0.0
        enddo
        enddo
        p1 = young*(1.0-xnu)/((1.0+xnu)*(1.0-2.0*xnu))
        p2 = p1*xnu/(1.0-xnu)
        p3 = p1*(1.0-2.0*xnu)/(2.0*(1.0-xnu))
        cmatl(1,1) = p1
        cmatl(1,2) = p2
        cmatl(1,3) = 0.0
        cmatl(2,1) = p2
        cmatl(2,2) = p1
        cmatl(2,3) = 0.0
        cmatl(3,1) = 0.0
        cmatl(3,2) = 0.0
        cmatl(3,3) = p3
endif

C
C -----
C **compute stresses based on Incremental Deformation Theory**
C (core routine)
C -----
C
if(i_yield.eq.2 .or. i_yield.eq.7 .or. i_yield.eq.3) then
C
        call kup afr(cmatl,esp,sn,xp_ep,stran,ntens,eqstress)
C
endif

C
C -----
C return of new variables
C -----
C

        if(ndi.eq.3.and.nshear.eq.3) then
                do i = 1,6
                        s(i) = sn(i)
                        do j = 1,6
                                d(i,j) = cmatl(i,j)
                        enddo
                enddo
        elseif(ndi.eq.2.and.nshear.eq.1) then
                do i = 1,3
                        s(i) = sn(i)
                        do j = 1,3
                                d(i,j) = cmatl(i,j)
                        enddo
                enddo
        enddo

```

```

        endif

        return
    end

C-----
    subroutine alpmat_cer(dk,dd_p,c,nstrml)
    implicit real*8(a-h,o-z)
    dimension dd_p(nstrml,nstrml),c(nstrml,nstrml),tus(nstrml)
C
    call invert_cer(c,nstrml,tus,0,det,nstrml)
    do i=1,nstrml
        do j=1,nstrml
            c(i,j) = c(i,j) + dk*dd_p(i,j)
        enddo
    enddo
    call invert_cer(c,nstrml,tus,0,det,nstrml)
C
    return
    end
C-----

    subroutine kyshr_cer(xp_ep,ys,hr)
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
    common/ki_select/i_hard,i_yield,i_plo
    common/ksh_mtl/ams1,ams2,ams3,y_0
C
    -----
C    Stress-Strain Curve (Hardening)
C    -----
        if(i_hard.eq.1) then
            ys=ams1*(ams2+xp_ep)**ams3
            hr = ams1*ams3*(ams2+xp_ep)**(ams3-1.0)
        elseif(i_hard.eq.2) then
            ys = ams1 -ams2*exp(-ams3*xp_ep)
            hr = ams2*ams3*exp(-ams3*xp_ep)
        endif
C
    return
    end
C-----

    subroutine invert_cer(a,n,b,mr,d2,idim)
    implicit real*8 (a-h,o-z)
C    include '../common/prepro'
C    called by      used generally throughout the program
C    ** floating point systems note:  compile with opt=4 and onetrip
    dimension a(*),l(15),m(15),b(*),br(15)
C    if(n.gt.15)write(kou,1)n
1    format(20x,31h  invert needs bigger dimension,i10)
    d=1.d0
    nk=-idim
    do 80 k=1,n
        nk=nk+idim
        l(k)=k
        m(k)=k
        kk=nk+k
        biga=a(kk)
        do 20 j=k,n
            iz=idim*(j-1)
            do 20 i=k,n
                ij=iz+i
                if(dabs(biga).ge.dabs(a(ij)))go to 20
                biga=a(ij)
                l(k)=i
                m(k)=j
20    continue
            j=l(k)
            if(j.eq.k)go to 35

```

```

ki=k-idim
do 30 i=1,n
ki=ki+idim
hold=-a(ki)
ji=ki-k+j
a(ki)=a(ji)
30 a(ji)=hold
35 i=m(k)
if(i.eq.k)go to 45
jp=idim*(i-1)
do 40 j=1,n
jk=nk+j
ji=jp+j
hold=-a(jk)
a(jk)=a(ji)
40 a(ji)=hold
45 if(biga.ne.0.d0)go to 48
d2=0.d0
return
48 do 55 i=1,n
if(i.eq.k)go to 55
ik=nk+i
a(ik)=-a(ik)/biga
55 continue
do 65 i=1,n
ik=nk+i
hold=a(ik)
ij=i-idim
do 65 j=1,n
ij=ij+idim
if(i.eq.k)go to 65
if(j.eq.k)go to 65
kj=ij-i+k
a(ij)=hold*a(kj)+a(ij)
65 continue
kj=k-idim
do 75 j=1,n
kj=kj+idim
if(j.eq.k)go to 75
a(kj)=a(kj)/biga
75 continue
d=d*biga
a(kk)=1.d0/biga
80 continue
k=n
100 k=k-1
if(k.eq.0)go to 700
i=l(k)
if(i.eq.k)go to 120
jq=idim*(k-1)
jr=idim*(i-1)
do 110 j=1,n
jk=jq+j
hold=a(jk)
ji=jr+j
a(jk)=-a(ji)
110 a(ji)=hold
120 j=m(k)
if(j.eq.k)go to 100
ki=k-idim
do 130 i=1,n
ki=ki+idim
hold=a(ki)
ji=ki-k+j
a(ki)=-a(ji)
130 a(ji)=hold

```

```

        go to 100
700 if(mr.eq.0)go to 800
    do 710 mrr=1,mr
        ir=(mrr-1)*idim+1
        do 711 i=1,n
            ik=i
            hold=0.d0
            jk=ir
            do 709 j=1,n
                hold=hold+a(ik)*b(jk)
                ik=ik+idim
709 jk=jk+1
711 br(i)=hold
            do 712 i=1,n
                b(ir)=br(i)
712 ir=ir+1
710 continue
800 continue
    d2=1.d32
    if(dabs(d).le.1.d32) d2=d
c    if( abs(d).le.1.e32) d2=d
sp
    return
end
C-----
subroutine kup_afr(d,de,sn,xp_ep,stran,ntens,ri)
implicit real*8(a-h,o-z)
common/ki_select/i_hard,i_yield,i_plo
common/ksh_mtl/ams1,ams2,ams3,y_0
dimension d(ntens,ntens),dd(ntens,ntens),bb(ntens,ntens)
dimension dd_p(ntens,ntens),de(ntens),sn(ntens),si(ntens)
dimension se(ntens),tus(ntens),rtemp(ntens)
dimension xni(ntens),xl_m(ntens),d_sig(ntens),stran(ntens)
C
C    initialization
C    -----
C    sttol = 10.d-6
C    sttoldiv = -0.01d0
C    xp_rn=0.0
C    pi = xp_ep
C
C    if(i_plo.eq.2) goto 501
C
C    inverse matrix of C
C    -----
C    do i=1,ntens
C        do j=1,ntens
C            dd(i,j) = d(i,j)
C        enddo
C    enddo
C    call invert_cer(dd,ntens,tus,0,det,ntens)
C    -----
501 continue
C    -----
C    stress at t=n
C    -----
C    do 5 i=1,ntens
C        si(i) = sn(i)
5    continue
C
C    trial stress
C    -----
C    do 10 i=1,ntens
C        do 10 j=1,ntens
C            si(i) = si(i)+d(i,j)*de(j)
C            se(i) = si(i)

```

```

10      continue
c
c      stress-strain curve
c      -----
c      call kyshr_cer(pi,xka0,hk)
c      xke = xka0
c      xka = xka0
c
c      yield stress and plastic potential
c      -----
c      call kazacu_betao(si,xn,ri)
c      ri0 = ri
c
c      g1-function in Eq.(61) difference between potential s-s curve
c      -----
c      qi = ri - xka0
c      qt = qi
c
c      if(qt.lt.0.0) then !elastic
c          do il = 1,ntens
c              stran(il) = 0.0d0
c          enddo
c          goto 333
c      endif
c
c      number of sub-step
c      -----
c      ninc = qt/(0.25*y_0)
c
c      if(ninc.gt.10) ninc = 10
c
c      ninc = 1 !10
c
c      inum = 10
c      if(ninc.lt. 1) ninc = 1
c      rninc = ninc
c      dq = qt/rninc
c
c
c      -----
c      step roof for return mapping
c      -----
c      do 25 k=1,ninc
c          qt = qt - dq
c          sdl = 0.0d0
c          dl  = 0.0d0
c
c      -----
c      iteration roof for return mapping
c      -----
c      do 30 j=1,inum
c
c      evaluation of yield stress and potential
c      -----
c      call kazacu_betao(si,xn,ri)
c
c      do ii=1,ntens
c          do jj=1,ntens
c              bb(ii,jj) = d(ii,jj)
c          enddo
c      enddo
c
c      if(i_plo.eq.2) goto 502
c
c      E-matrix in Eq.(62b)
c      -----
c      call alpmat_cer(xp_rn,dd_p,bb,ntens)

```

```

c      g2-function in Eq.(61)
c      -----
c      do 200 ii=1,ntens
c      xl_m(ii) = sdl*xni(ii)
c      xl_m(ii) = xp_rn*xni(ii)
c      do 200 jj=1,ntens
c      xl_m(ii) = xl_m(ii) + dd(ii,jj)*(si(jj)-se(jj))
200    continue
c
c      Part of Eq.(63)
c      -----
c      r1 = 0.0
c      do 210 ij=1,ntens
c      do 210 ik=1,ntens
c      r1 = r1 + xni(ij)*bb(ij,ik)*xl_m(ik)
210    continue
c
c      g3-function in Eq.(61)
c      -----
c      slo = (xka-xke)-dl*hk
c      -----
502    continue
c      -----
c      Part of Eq.(63)
c      -----
c      r2 = 0.d0
c      do 220 ij=1,ntens
c      rtemp(ij) = 0.d0
c      do 220 ik=1,ntens
c      rtemp(ij) = rtemp(ij) + bb(ij,ik)*xni(ik)
220    continue
c      do 225 ii=1,ntens
c      r2 = r2 + rtemp(ii)*xni(ii)
225    continue
c
c      Part of Eq.(63)
c      -----
c      cc = qi - qt
c
c      Eq.(63)
c      -----
c      update of effective plastic strain
c      -----
c      if(i_plo.eq.2) then
c      dl = cc/(r2+hk)
c      xp_rn = xp_rn + dl
c      sdl = xp_rn
c      pi = xp_ep + xp_rn
c      else
c      dl = (cc-r1+slo)/(r2+hk)
c      sdl = sdl + dl
c      xp_rn = sdl
c      xp_rn = xp_rn + dl
c      pi = xp_ep + xp_rn
c      endif
c
c      if(i_plo.eq.2) then
c      do ii=1,ntens
c      d_sig(ii) = 0.d0
c      do jj=1,ntens
c      d_sig(ii) = d_sig(ii) -dl*bb(ii,jj)*xni(jj)
c      enddo
c      enddo
c      goto 503
c      endif

```

```

c      Evaluation of Eq.(62b)
c      -----
c      do 230 ii=1,ntens
c      d_sig(ii) = 0.d0
c      do 230 jj=1,ntens
c      d_sig(ii) = d_sig(ii)-bb(ii,jj)*(xl_m(jj)+dl*xni(jj))
230  continue
c      -----
503  continue
c      -----
c      Evaluation of current stress during return mapping
c      -----
c      do 240 i=1,ntens
c      si(i) = si(i) + d_sig(i)
c      if(i_plo.eq.1) si(i) = se(i) + d_sig(i)
240  continue
c
c      evaluation of yield surface potential
c      -----
c      call kazacu_betao(si,xn,ri)
c
c      xke = xka
c
c      stress-strain curve
c      -----
c      call kyshr_cer(pi,xka,hk)
c
c      residual evaluation
c      -----
c      q0 = qi
c      qi = ri - xka
c
c      if(dabs(qi-qt)/xka .lt. sttol) then
c      goto 555
c      endif
c
c      rqq = ri*ri
c      rqq = (q0*q0-qi*qi)/rqq
c      if(rqq.lt.sttoldiv) then
c      write(*,*) 'plastic diverge'
c      goto 555
c      endif
c      if(j.eq.inum) then
c      write(*,*) 'over iteration'
c      goto 555
c      endif
30  continue
c      -----
c      end of iteration roof
c      -----
555  continue
25  continue
c      -----
c      end of step roof
c      -----
c      xp_ep = pi
c
c      -----
c      Algorithmic tangent
c      -----
c      do i=1,ntens
c      rtemp(i) = 0.d0
c      do j=1,ntens
c      rtemp(i) = rtemp(i) + bb(i,j)*xni(j)
c      enddo
c      enddo

```



```

scal = hk
do i=1,ntens
    scal = scal + xni(i)*rtemp(i)
enddo
ss1 = 0.d0
ss2 = 0.d0
do i=1,ntens
    ss1 = ss1 + de(i)*de(i)
    ss2 = ss2 + sdl*sdl*xni(i)*xni(i)
enddo
if(ss1.gt.0.d0) then
    rat = ss2/ss1
endif
if(rat.gt.1.d0) rat =1.d0
if(rat.lt.0.d0) rat =0.d0

do i=1,ntens
    do j=1,ntens
        d(i,j) = bb(i,j) -rat*rtemp(i)*rtemp(j)/scal
    enddo
enddo

C
do i = 1,ntens
    stran(i) = xp_rn * xni(i)
enddo

C
333 continue
C
do i=1,ntens
    sn(i)=si(i)
enddo

C
return
end

C-----
subroutine kazacu_betao(si,xn,q)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
dimension si(3),xn(3)
dimension dev(3),pr(4),ddev(3,4),dpr(4,3),deff(4),
1 alp(3),apr(3)
common/kbarlat/bc1,bc2,bc3,bc6,alx,aly,alz0,alz1,em

C
C -----
C Criterio de Cazacu para o betao
C -----
C
do i=1,3
    xn(i)=0.0
enddo

C
txx = si(1)
tyy = si(2)
txy = si(3)

call cazacu_stressani(txx,tyy,txy,sxx,syy,szz,sxy)
call cazacu_prin(sxx,syy,sxy,szz,e1,e2,e3)
call cazacu_eq(e1,e2,e3,q)

return
end

C
subroutine cazacu_stressani(txx,tyy,txy,sxx,syy,szz,sxy)
implicit double precision(a-h,o-z)
common /kazacubetao/c11,c12,c13,c22,c23,c33,c66,ck,ca,cx,cy

```

```

sxx = (0.2D1/0.3D1*c11-c12/0.3D1-c13/0.3D1)*(txx+cx)+
1      (c11/0.3D1+0.2D1/0.3D1*c12-c13/0.3D1)*(tyy+cy)
C
      syy = (0.2D1/0.3D1*c12-c22/0.3D1-c23/0.3D1)*(txx+cx)+
1      (-c12/0.3D1+0.2D1/0.3D1*c22-c23/0.3D1)*(tyy+cy)
C
      sxy = c66 * txy
C
      szz = (0.2D1/0.3D1*c13-c23/0.3D1-c33/0.3D1)*(txx+cx)+
1      (-c13/0.3D1+0.2D1/0.3D1*c23-c33/0.3D1)*(tyy+cy)
C
      return
      end

      subroutine cazacu_prin(sxx,syy,sxy,szz,e1,e2,e3)

      implicit double precision(a-h,o-z)
C
e1 = sxx/0.2D1+syy/0.2D1 +
1      dsqrt(sxx**2-0.2D1*sxx*syy+syy**2+4.0d0*sxy**2)/0.2D1
C
      e2 = sxx/0.2D1+syy/0.2D1 -
1      dsqrt(sxx**2-0.2D1*sxx*syy+syy**2+4.0d0*sxy**2)/0.2D1
C
      e3 = szz
C
      return
      end

      subroutine cazacu_eq(e1,e2,e3,f)

      implicit double precision(a-h,o-z)
      common /kazacubetao/c11,c12,c13,c22,c23,c33,c66,ck,ca,cx,cy
C
      f = (dabs(e1)-ck*e1)**ca+(dabs(e2)-ck*e2)**ca+(dabs(e3)-ck*e3)**ca
      f = f**(1.0/ca)
C
      return
      end

```